А. Л. Вернер В. И. Рыжик

Геометрия

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

8 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
В 35

16+

Вернер А. Л.

В 35 Геометрия. Методические рекомендации. 8 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 2017. — 92 с.: ил. — ISBN 978-5-09-043921-3.

Учебное пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Геометрия. 8 класс» (авторы: А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик). В ней дано примерное тематическое планирование по главам и параграфам. Авторы предлагают общие методические рекомендации по урокам, контрольные работы, а также решения задач и тесты к главам учебника.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-043921-3

Оглавление

Методические рекомендации

Курс геометрии 8 класса — это во многом геометрия вычислений, геометрия формул: к рисунку, который изображает геометрическую фигуру, добавляются алгебраические формулы, которые выражают связи между геометрическими величинами этой фигуры. Связь курса геометрии с курсом алгебры в 8 классе становится очень тесной. Работать по учебнику «Геометрия, 8» можно после любого курса геометрии 7 класса: все факты курса 7 класса, необходимые для изучения геометрии в 8 классе, повторяются во Введении к учебнику «Геометрия, 8».

Структура учебника «Геометрия, 8» такова: Введение «Повторение», глава 1 «Площади многоугольных фигур», глава 2 «Геометрия треугольника», тесты, итоги, предметный указатель, ответы, таблица тригонометрических функций, список рекомендуемой литературы.

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

Примерное тематическое планирование (64 часа)

Введение. Повторение	**4 ч**
1. Треугольники	2 ч
2. Параллельность	1 ч
3. Множество (геометрическое место точек)	1 ч
Глава I. Площади многоугольных фигур	**31 ч**
§ 1 Многоугольники	7 ч
1.1 Ломаные и многоугольники	1 ч
1.2 Выпуклые и невыпуклые многоугольники	1 ч
1.3 Четырёхугольники	1 ч
1.4 Правильные многоугольники	2 ч
1.5 Многоугольные фигуры	1 ч
1.6 Многогранники. Пирамиды	1 ч
§ 2 Площадь многоугольной фигуры	2 ч
2.1 Понятие площади. Измерение площади	1 ч
2.2 Площадь прямоугольника	1 ч
§ 3 Теорема Пифагора	6 ч
3.1 Важнейшая теорема геометрии	2 ч
3.2—3.3 Пифагор. Равносоставленные фигуры	1 ч
3.4 Вычисление длин. Квадратный корень. Вычисление высоты треугольника по его сторонам	2 ч
3.5 Наклонные и проекции	1 ч
§ 4 Площадь треугольника и площадь трапеции	6 ч
4.1 Площадь треугольника	2 ч
4.2 Формула Герона	1 ч
4.3 Трапеция.	1 ч
Площадь трапеции	1 ч
Контрольная работа № 1	1 ч
§ 5 Параллелограмм и его площадь	10 ч
5.1 Параллелограмм. Свойства параллелограмма	2 ч
5.2 Признаки параллелограмма	2 ч
5.3 Частные виды параллелограмма	2 ч
5.4 Площадь параллелограмма	2 ч
5.5 Параллелепипед. Призмы	1 ч
Контрольная работа № 2	1 ч
Глава II. Геометрия треугольника	**29 ч**
§ 6 Синус. Применения синуса	7 ч
6.1 Теорема об отношении перпендикуляра и наклонной	1 ч
6.2 Определение синуса	1 ч
6.3 Свойства синуса и его график	1 ч
6.4 Решение прямоугольных треугольников	1 ч
6.5 Вычисление площади треугольника	1 ч
6.6 Теорема синусов	1 ч

Решение задач	1 ч
§ 7 Косинус. Применения косинуса	8 ч
7.1 Определение косинуса	1 ч
7.2 Основное тригонометрическое тождество	1 ч
7.3 Косинусы острых углов прямоугольного треугольника	1 ч
7.4 Свойства косинуса и его график	1 ч
7.5 Теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора)	1 ч
7.6 Средние линии треугольника и трапеции	1 ч
7.7 Применения косинуса в практике	1 ч
Контрольная работа № 3	1 ч
§ 8 Тригонометрические функции	3 ч
8.1 Тангенс	1 ч
8.2 Котангенс	1 ч
8.3 Из истории тригонометрии	1 ч
§ 9 Подобные треугольники	3 ч
9.1 Определение подобных треугольников	1 ч
9.2 Признаки подобия треугольников	1 ч
9.3 Свойства подобных треугольников	1 ч
§ 10 Применения теорем о подобии треугольников	8 ч
10.1 Подобие треугольников и параллельность. Теорема Фалеса	1 ч
10.2 Фалес	1 ч
10.3 Применения подобия при решении задач на построение	1 ч
10.4—10.5 Построение среднего геометрического. Пентаграмма и золотое сечение	2 ч
10.6 Точка пересечения медиан треугольника	1 ч
Решение задач	1 ч
Контрольная работа № 4	1 ч
Резерв	6 ч

1. Теоретический материал
(общие методические рекомендации)

Введение. Повторение. (4 часа) (1. Треугольники. 2. Параллельность. 3. Множество (геометрическое место) точек).

***Урок* 1** (равенство треугольников, равнобедренный треугольник). При повторении признаков равенства треугольников следует обратить внимание на то, что определить их равенство можно по-разному, но, аргументируя равенство треугольников, удобнее называть не номер признака, а элементы, обеспечивающие это равенство: *по трем сторонам*; *по двум сторонам и углу между ними*; *по стороне и двум прилежащим к ней углам.*

Повторяя свойства и признаки равнобедренного треугольника и серединного перпендикуляра отрезка, вспоминаем о характерных свойствах фигур, о взаимно обратных утверждениях, о применении словесного оборота *тогда и только тогда.*

***Урок* 2** (прямоугольный треугольник, сумма углов треугольника). Особо стоит остановиться на четырёх признаках равенства прямоугольных треугольников, которые перечислены в задаче 1. Они являются следствиями общих признаков равенства треугольников и теоремы о сумме углов треугольника. Пятый признак равенства прямоугольных треугольников (по катету и гипотенузе) таким следствием не является и его доказательство приведено в задачной рубрике *Разбираемся в решении.*

***Урок* 3** (параллельность). Взаимно обратные утверждения появятся и при повторении признаков параллельности прямых и свойств углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой. Эти три пары взаимно обратных утверждений и составляют содержание пункта 2.

***Урок* 4** (множество (геометрическое место) точек). Три выражения: 1) *фигура имеет характерное свойство А*, *определяющее*, *какие точки принадлежат фигуре*, *а какие не принадлежат ей*; 2) *фигура является множеством точек, обладающих свойством А*, а также 3) *фигура является геометрическим местом точек*, *обладающих свойством А* — говорят об одном и том, т.е. равносильны. Архаичный термин *геометрическое место точек* вполне можно было бы заменить термином *множество точек.* Но поскольку в Стандартах второго поколения этот термин присутствует, то авторы в учебнике его вводят и иллюстрируют. Следует обратить внимание и на *метод геометрических мест* при решении задач на построение.

Глава I. Площади многоугольных фигур
(31 час, 2 контрольные работы)

Понятие площади — важнейшее понятие геометрии. Геометрия начиналась в древности с измерения площадей. Отодвигать в конец курса изучение этого фундаментального понятия не следует не только из-за его практической важности, но и потому, что на него опирается построение основ тригонометрии в следующей главе.

§ 1. Многоугольники (7 часов)

1.1. Ломаные и многоугольники. 1.2. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. 1.3. Четырёхугольники. 1.4. Правильные многоугольники. 1.5. Многоугольные фигуры. 1.6. Многогранники. Пирамиды.

Содержание этого параграфа еще относится к геометрии построений.

***Урок* 5** (п. 1.1. Ломаные и многоугольники). Сначала из отрезков строятся ломаные, и из этих ломаных выделяются простые замкнутые ломаные. Обращаем внимание, что *многоугольник* — это конечная часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, а не простая замкнутая ломаная, которая является *границей многоугольника.* Такой подход согласуется с обычным пониманием слов *прямоугольник*, *квадрат*, *площадь квадрата* и т.п.

***Урок* 6** (п. 1.2. Выпуклые и невыпуклые многоугольники; п. 1.3. Четырёхугольники). Начинается изучение важной линии *выпуклых фигур*, играющей видную роль в современной математике. Сравнить выпуклые и невыпуклые многоугольники удобно на четырёхугольниках. В пункте 1.3 о четырёхугольниках напоминается, что сумма углов четырёхугольника равна 360°.

***Уроки* 7 и 8** (п. 1.4. Правильные многоугольники). Идущую от учебника А. П. Киселёва традицию увязывать изучение правильных многоугольников лишь с измерением длины окружности и площади круга, нельзя считать удачной. Правильные многоугольники богаты разнообразными геометрическими свойствами, красивы, симметричны. Они находят многочисленные применения в быту, в архитектуре, в искусстве. Да и о правильных призмах и пирамидах, о правильных многогранниках нельзя говорить без правильных многоугольников. Курс геометрии в 8 классе завершится подробным изучением правильного пятиугольника, пентаграммы и золотого сечения. Правильные многоугольники вводятся сначала конструктивно, как многоугольники, составленные из равных друг другу равнобедренных треугольников с общей вершиной, а затем они определяются как многоугольники, имеющие равные друг другу стороны и равные друг другу углы. Доказана теорема о центре правильного многоугольника и рассказано о построении правильных многоугольников циркулем и линейкой. Центр правильного многоугольника определяется как точка, равноудаленная от всех его вершин.

***Урок* 9** (п. 1.5. Многоугольные фигуры). Понятие многоугольной фигуры как объединения конечного числа многоугольников вводится с той целью, чтобы в следующем параграфе определить площадь именно для класса многоугольных фигур. При таком определении понятно, например, что такое площадь фигуры, состоящей из двух многоугольников, которые не имеют общих точек. Если же ограничиться определением площади лишь на классе многоугольников, то для такой фигуры площадь окажется не получившей определения, что не согласуется с реальной практикой: каждый понимает, что такое жилая площадь квартиры, состоящей из нескольких комнат.

***Урок* 10** (п. 1.6. Многогранники. Пирамиды). В разделе «Наглядная геометрия» в 5—6 классах присутствует понятия многогранника. Здесь оно обогащается сравнением двух подходов к этому понятию: описательному — как части пространства, ограниченного конечным числом многоугольников, и конструктивному — как фигуре, составленной из тетраэдров. Выделяется важный класс многогранников — пирамиды. Большое внимание уделено построению пирамид и знакомству с правильными пирамидами.

***Урок* 11** (итоговый урок по § 1 Многоугольники). В первом параграфе введено много новых понятий и стоит дать итоговый обзор этих понятий, напомнить их определения. Хорошо было бы порешать задачи рубрики *Исследуем* из разных пунктов этого параграфа.

§ 2. Площадь многоугольной фигуры (2 часа)

2.1. Понятие площади. Измерение площади. 2.2. Площадь прямоугольника.

***Урок* 12** (п. 2.1. Понятие площади. Измерение площади). Площадь определяется на классе многоугольных фигур как аддитивная положительная величина, которая равна для равных треугольников. Любая многоугольная фигура составлена из треугольников, а потому две многоугольные фигуры, составленные из соответственно равных треугольников, имеют равные площади — равновелики. Естественно, что в 8 классе вопрос о существовании такой функции не поднимается и считается, что такая функция существует. Если же учитель захочет ознакомиться с доказательством существования площади на классе многоугольников, то он может найти такое доказательство в книге А. Д. Александрова и Н. Ю. Нецветаева «Геометрия» (М., «Наука», 1990) или в книге Л. С. Атанасяна и В. Т. Базылева «Геометрия», ч. 2 (М., «Просвещение», 1987). После того, как дано определение площади многоугольной фигуры, в п. 2.1 рассказано о процессе измерения площади, в результате которого получается *численное значение площади при выбранной единице измерения.* Это численное значение для важнейших фигур выражается *формулой,* в которой площадь вычисляется через длины некоторых отрезков, определенных данной фигурой. Дальнейшее изучение площадей в основном и состоит в выводе формул для вычисления площадей.

***Урок* 13** (п. 2.2. Площадь прямоугольника). Первой из формул для площадей является хорошо знакомая ученикам формула для площади прямоугольника. В п.2.2 последовательно даётся вывод этой формулы для прямоугольников с целыми, рациональными и иррациональными длинами сторон (последний случай — для углубленного изучения).

§ 3. Теорема Пифагора (6 часов)

3.1. Важнейшая теорема геометрии. 3.2. Пифагор. 3.3. Равносоставленные фигуры. 3.4. Вычисление длин. Квадратный корень. 3.5. Наклонные и проекции.

***Уроки* 14 и 15** (п. 3.1 Важнейшая теорема геометрии и п. 3.2 Пифагор). Теорема Пифагора — важнейшая теорема евклидовой геометрии — это теорема о площадях квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника. Она используется при доказательстве многих теорем и при решении вычислительных задач. Поэтому её доказательство дается как можно раньше (п. 3.1). В отдельном п. 3.2 рассказано о знаменитом древнегреческом мудреце Пифагоре, именем которого названа главная теорема евклидовой геометрии.

В задачном материале в разделе *Дополняем теорию* доказана и теорема, обратная теореме Пифагора. Тем самым доказано, что равенство суммы квадратов двух сторон треугольника квадрату его третьей стороны, является характеристическим свойством прямоугольного треугольника.

Урок **16** (п. 3.3. Равносоставленные фигуры). Общее определение равенства двух фигур будет сформулировано в девятом классе после определения движения фигур. Пока даны определения равенства некоторых простейших фигур — треугольников, прямоугольников. Поскольку многоугольные фигуры составлены из треугольников, то определение равносоставленности для многоугольных фигур вполне содержательно (хотя без него можно было бы и обойтись, но это понятие присутствует в Стандартах, а потому оно должно быть в учебнике). Задач к этому пункту авторы не предлагают, а стоит вернуться к предыдущим задачам (например, к задачам 2.2, 2.3, 2.4, 3.3) и поискать там равносоставленные фигуры. Может быть, стоит сказать и о том, что *любые равновеликие многоугольные фигуры равносоставлены* (теорема Бойяи—Гервина).

Урок **17** (п. 3.4. Вычисление длин. Квадратный корень). Чтобы при решении задач не быть зависимым от курса алгебры, в п. 3.4 рассказано об операции извлечения квадратного корня. В этом пункте с помощью теоремы Пифагора решена важная задача — длина высоты треугольника выражена через длины его сторон (задача 3.6).

Уроки **18 и 19** (п. 3.5. Наклонные и проекции). Наклонная к прямой и её проекция на эту прямую естественным образом задают прямоугольный треугольник. Одним из применений теоремы Пифагора могут быть доказательства свойств наклонных и проекций, которые и изучаются в п. 3.5. В разделе *Дополняем теорию* даны две важные задачи 3.37 и 3.38.

§ 4. Площадь треугольника и трапеции (5 часов)

4.1. Площадь треугольника. 4.2. Формула Герона. 4.3. Трапеция. Площадь трапеции.

Уроки **20 и 21** (п. 4.1. Площадь треугольника). Следующей за прямоугольником фигурой, для которой выводится формула вычисления её площади, является треугольник (п.4.1). Сначала доказывается, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Затем, зная формулу площади прямоугольного треугольника, выводится формула для площади любого треугольника.

Урок **22** (п. 4.2. Формула Герона). Треугольник задается своими сторонами. Поэтому естественно выразить площадь треугольника через длины его сторон. Это делается в п. 4.2 — выводится формула Герона. Для её вывода используется формула для высоты треугольника, полученная в п.3.4.

Урок **23** (п. 4.3. Трапеция и её площадь). Любая многоугольная фигура составлена из треугольников. Поэтому, умея вычислять площадь треугольника, мы сумеем вычислять площади любых многоугольных фигур. Многоугольников, для которых выводятся специальные формулы вычисления площадей, немного. В п. 4.3 ученики знакомятся с одним из таких многоугольников — трапецией.

Урок **24.** Решение задач перед контрольной работой.

***Урок* 25.** Контрольная работа № 1.

Теорема Пифагора и площадь треугольника

Вариант 1

1. Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна 6. Найдите: а) длину его меньшей диагонали; б) площадь шестиугольника.

2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы C и D — прямые, диагональ BD — биссектриса угла D, $AB = BD$, $AD = 2$. а) Докажите, что треугольник BCD — равнобедренный. б) Докажите, что треугольник ABD — прямоугольный. в) Вычислите площадь трапеции $ABCD$.

3. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $PABCD$ — прямоугольник со сторонами 4 и 6, а её боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности пирамиды.

Решение

1. Сторона правильного шестиугольника в два раза меньше его большой диагонали, а потому равна 3. а) Меньшая диагональ правильного шестиугольника — это катет прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является большая диагональ, а вторым катетом — сторона шестиугольника. Поэтому она равна $3\sqrt{3}$. б) Правильный шестиугольник составлен из шести правильных треугольников с площадью $2{,}25\sqrt{3}$. Поэтому площадь шестиугольника равна $13{,}5\sqrt{3}$.

2. Так как $AB = BD$, то $\angle A = 45°$ и треугольник ABD — прямоугольный и равнобедренный. Легко доказать, что треугольник BCD —прямоугольный равнобедренный. Причём $BD = \sqrt{2}$, а $CD = 1$. Поэтому площадь трапеции равна 1,5.

3. Высоты боковых граней пирамиды со стороной 4 равны $\sqrt{21}$, а со стороной 6 равны 4. Поэтому площадь поверхности пирамиды равна $24 + 4\sqrt{21} + 24$, т. е. равна $48 + 4\sqrt{21}$.

Вариант 2

1. Длина меньшей диагонали правильного шестиугольника равна 3. Найдите: а) длину его большой диагонали; б) площадь шестиугольника.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол D равен 60°, диагональ AC — биссектриса угла A, $AC \perp CD$, $AD = 2$. а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный. б) Докажите, что треугольник ABD — прямоугольный. в) Вычислите площадь трапеции $ABCD$.

3. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 6, а её боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности пирамиды.

Решение.

1. Сторона правильного шестиугольника в два раза меньше его большой диагонали. Меньшая диагональ правильного шестиугольника — это катет прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является большая диагональ, а вторым катетом — сторона шестиугольника. Если x — сторона шестиугольника, то $2x$ — его большая диагональ и $4x^2 - x^2 = 9$. Поэтому $x = \sqrt{3}$, а большая диагональ равна $2\sqrt{3}$. б) Правильный шестиугольник составлен из шести правильных треугольников с площадью $0{,}75\sqrt{3}$. Поэтому площадь шестиугольника равна $4{,}5\sqrt{3}$.

2. Так как $\angle D = 60°$ и трапеция равнобедренная, то $\angle A = 60°$, поэтому $\angle CAB = 30°$. Угол ACD равен 90°. а) Так как в треугольнике ABC углы, прилежащие к стороне AC, равны по 30°, то треугольник ABC — равнобедренный. б) Треугольники ABD и DCA равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, следовательно треугольник ABD — прямоугольный. в) $AB = BC = CD = 1$, а высота трапеции равна $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Поэтому площадь трапеции равна $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

3. Высоты боковых граней пирамиды равны 4. Поэтому площадь поверхности пирамиды равна 36 + 48 = 84.

Примечание. В контрольной работе можно использовать часть заданий. Можно выделить обязательные задания или предложить ученику выбрать их самому (оговорив, за что ставится оценка «отлично», «хорошо» и т. д.). Это примечание относится и к последующим контрольным работам.

§ 5. Параллелограмм и его площадь (10 часов)

5.1. Параллелограмм. Свойства параллелограмма. 5.2. Признаки параллелограмма. 5.3. Частные виды параллелограмма. 5.4. Площадь параллелограмма. 5.5. Параллелепипед. Призмы.

Кроме трапеции еще один вид четырёхугольников заслуживает специального изучения и вывода формулы для вычисления его площади — это параллелограмм. Ему посвящен § 5.

***Уроки* 26—27** (п. 5.1. Параллелограмм. Свойства параллелограмма).

***Уроки* 28—29** (п. 5.2. Признаки параллелограмма).

Изучение первых двух пунктов параграфа (о свойствах и признаках параллелограмма) вполне традиционно: свойства параллелограмма вытекают из признаков равенства треугольников, а признаки параллелограмма следуют из признаков параллельности прямых. Отметим, что сопоставление свойств и признаков параллелограмма позволяет выделить несколько характерных свойств параллелограмма (см. п. 5.2).

***Урок* 30** (п. 5.3. Частные виды параллелограмма). В п. 5.3 рассматриваются прямоугольник, ромб и квадрат, которые *являются* частными случаями параллелограмма. Но определять прямоугольник как параллелограмм, у которого все углы прямые, по мнению авторов, нелепо. С прямоугольником ученики знакомы с первого класса и знают его как четырёхугольник, у которого все углы прямые (да и его название говорит об этом). Сказать о том, что прямоугольник является частным случаем параллелограмма необходимо, но не *определять* его как некий параллелограмм.

Так же и ромбом стоит назвать четырёхугольник, у которого все стороны равны друг другу, а затем выяснить, что он является параллелограммом и установить его характеристические свойства среди параллелограммов.

***Урок* 31** (п. 5.4. Площадь параллелограмма). Формулу для площади параллелограмма легко вывести, разбив параллелограмм диагональю на два равных треугольника.

В п. 5.5 рассматривается стереометрический аналог параллелограмма — параллелепипед, а также рассматриваются призмы. На этот пункт может не хватить времени в первом полугодии (в этом случае начните изучение этого пункта во втором полугодии). Кроме того, в первом полугодии необходимо провести контрольную работу о параллелограммах. Поэтому следующий урок 32 — решение задач о параллелограммах, а затем — контрольная работа № 2.

***Урок* 32.** Решение задач о параллелограммах.

***Урок* 33.** Контрольная работа № 2.

<u>Параллелограмм</u>

<u>Вариант 1</u>

1. $ABCD$ — параллелограмм, биссектриса его угла B пересекает сторону AD в точке K; сторона $BC = 11$, отрезок $KD = 3$. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

2. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отложили равные друг другу отрезки AK и CM, не имеющие общих точек. Докажите, что четырёхугольник $BKMD$ — параллелограмм

3. $ABCD$ — параллелограмм, $\angle CDA = 135°$, BM — высота на сторону AD и точка M не лежит на отрезке AD, $AM = 4$, $MD = 2$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

4. Вершины четырёхугольника $KMOP$ являются точками пересечений биссектрис углов параллелограмма $ABCD$. Определите вид четырёхугольника $KMOP$. Ответ обоснуйте.

Решение

1. Так как $AD = BC$, то $AD = 11$. Тогда $AK = 11 - 3 = 8$. Углы, прилежащие к стороне BK в треугольнике ABK, равны друг другу. Поэтому этот треугольник равнобедренный и $AB = AK = 8$. Поэтому периметр параллелограмма $ABCD$ равен 38.

2. Пусть диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Тогда диагонали BD и MK четырёхугольника $BKMD$ делятся пополам точкой O. Следовательно, $BKMD$ — параллелограмм.

3. $BM = 4$, $AD = 4 - 2 = 2$, площадь параллелограмма $ABCD$ равна 8.

4. Поскольку в условии задачи говорится о четырёхугольнике $KMOP$, то параллелограмм $ABCD$ — не ромб (в случае ромба этот четырёхугольник выродился бы в точку). Поскольку биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны, то $KMOP$ — параллелограмм. А так как биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны, то $KMOP$ — прямоугольник.

<u>Вариант 2</u>

1. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K; сторона $AB = 6$, отрезок $KC = 7$. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

2. Диагональ AC соединяет вершины острых углов параллелограмма $ABCD$, отличного от ромба. Из вершин B и D на AC опущены перпендикуляры BK и DM. Докажите, что четырёхугольник $BKDM$ — параллелограмм.

3. $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 135°$, BM — высота на сторону AD и точка M лежит на AD, $AM = 4$, $MD = 2$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

4. Отрезок BM — биссектриса треугольника ABC. Через точку M провели две прямые, параллельные сторонам BA и BC. Они пересекли стороны BA и BC в точках O и P. Определите вид четырёхугольника $BOMP$. Ответ обоснуйте.

Решение

1. Углы, прилежащие к стороне AK в треугольнике ABK, равны друг другу. Поэтому этот треугольник равнобедренный и $BK = AB = 6$. Далее, $BC = BK + KC = 6 + 7 = 13$. Поэтому периметр параллелограмма $ABCD$ равен 38.

2. Отрезки BK и DM — равны (как катеты равных прямоугольных треугольников ABK и CDM) и параллельны (как перпендикуляры к одной прямой AC). Поэтому четырёхугольник $BKDM$ — параллелограмм.

3. $BM = 4$ (как одна из равных сторон равнобедренного треугольника ABM), $AD = 4 + 2 = 6$, площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

4. В параллелограмме $BOMP$ диагональ BM — биссектриса угла B. Поэтому $BOMP$ — ромб.

***Уроки* 34 и 35** (п. 5.5. Параллелепипед. Призмы). Пространственным аналогом параллелограмма является параллелепипед. Пространственный аналог правильных многоугольников — правильные призмы. В п. 5.5 рассказано о параллелепипедах и о правильных призмах. Знакомство учеников с правильными пирамидами и призмами позволяет им видеть их в архитектурных сооружениях и развивает пространственные представления учеников. Этими уроками можно начать второе полугодие, повторяя на гранях параллелепипедов и призм материал, изученный в первом полугодии.

Глава II. Геометрия треугольника

(29 часов, 2 контрольных работы)

Важность этой главы в том, что в ней изучаются основы тригонометрии. А. Д. Александров в своей программной статье «О геометрии» в 1980 году (в журнале «Математика в школе» № 3) писал: «Тригонометрические функции — это испытанный аппарат геометрии, и их нужно излагать, отправляясь от простых наглядных задач, как они практически возникли — из решения треугольников». В программе основной школы тригонометрические функции остались сейчас лишь в курсе геометрии. Поэтому в этом курсе они должны быть изложены обстоятельно, а не скороговоркой, подкрепляться разнообразными приложениями (как теоретическими, так и практическими). Это и сделано в главе 2.

§ 6. Синус. Применения синуса (7 часов)

6.1. Теорема об отношении перпендикуляра и наклонной. 6.2. Определение синуса. 6.3. Свойства синуса и его график. 6.4. Решение прямоугольных прямоугольников. 6.5. Вычисление площади треугольника. 6.6. Теорема синусов.

***Урок* 36** (п. 6.1. Теорема об отношении перпендикуляра и наклонной). Интуитивное представление о синусе формируется у учеников в связи с задачей о вычислении высоты подъёма при движении по наклонному прямолинейному пути. Как доказать, что высота подъёма пропорциональна пройденному пути, т.е. отношение высоты подъёма к длине пройденного пути не зависит от точки, в которой вычисляется это отношение? Основная трудность, возникающая при этом, состоит в отношении несоизмеримых отрезков, т. е. в проблеме иррационального числа. А. Д. Александров «спрятал» эту проблему в школьном курсе геометрии в формулу для площади прямоугольника $S = ab$. После того как, опираясь на эту формулу, выведена формула для площади треугольника, в доказательстве теоремы об отношении перпендикуляра и наклонной проблема несоизмеримых отрезков уже не появляется.

***Урок* 37** (п. 6.2. Определение синуса). Определение синуса угла как отношения перпендикуляра и наклонной формулируется единообразно как для острых, так и для неострых углов. Из этого определения сразу вытекает, что *синусы смежных углов равны.* Вряд ли учеников стоит здесь спрашивать: «Что называется синусом?». Полезнее спросить у них: «Как найти синус угла?». После того, как доказано, что синусы равных углов равны, можно определить синус на промежутке [0°, 180°] градусных мер углов. При этом приходится ввести вырожденный угол, у которого стороны совпадают и мера которого равна 0°.

***Урок* 38** (п. 6.3. Свойства синуса и его график). При изучении синуса, косинуса, тангенса и котангенса мы подчеркиваем их функциональный характер. Функциональным свойствам синуса и его графику посвящен п. 6.3.

***Урок* 39** (п. 6.4. Решение прямоугольных треугольников). Решая прямоугольные треугольники, ученики должны запомнить, что синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

***Урок* 40** (п. 6.5. Вычисление площади треугольника) В п.6.5 выведена формула для площади треугольника $S = \frac{1}{2} bc \sin A$.

***Урок* 41** (п. 6.6.Теорема синусов). Теорема синусов является простым следствием определения синуса. Она позволяет решать треугольник по двум углам и стороне, а также помогает решать многие практические задачи, например, находить расстояние до недоступного предмета.

***Урок* 42** (решение задач по материалу § 6. «Синус. Применение синуса»). Изучая в течение месяца синус и решая многие задачи с применением синуса, ученики твердо усваивают это понятие.

§ 7. Косинус. Применения косинуса (7 часов)

7.1. Определение косинуса. 7.2. Основное тригонометрическое тождество. 7.3. Косинусы острых углов прямоугольного треугольника. 7.4. Свойства косинуса и его график. 7.5. Теорема косинусов (обобщенная теорема Пифагора). 7.6. Средние линии треугольника и трапеции. 7.7. Применения косинуса в практике.

***Урок* 43** (п. 7.1. Определение косинуса). Необходимость кроме синуса ввести еще одну тригонометрическую функцию — косинус — аргументируется тем, что значение синуса не определяет угол однозначно. Косинус же этим недостатком не обладает: зная косинус угла треугольника, мы по косинусу угол находим однозначно. Естественно, что понятие о косинусе прежде всего надо связывать с проекцией наклонной на ось. Так мы и поступаем, определяя косинус. Как и синус, косинус сразу определяется для любых углов, т. е. в промежутке [0°, 180°].

Как и в случае синуса, вряд ли стоит ученикам выучивать наизусть определение косинуса, но им необходимо знать, как находится косинус угла, а также, что косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе (см. п. 7.3).

***Урок* 44** (п. 7.2. Основное тригонометрическое тождество). Доказав основное тригонометрическое тождество, мы сводим изучение свойств косинуса к уже известным нам свойствам синуса. Важно, чтобы ученики видели в этом тождестве частный случай теоремы Пифагора.

***Урок* 45** (п.7.3. Косинусы острых углов прямоугольного треугольника). Решая с помощью косинуса прямоугольные треугольники, устанавливаем равенство синуса и косинуса дополнительных углов.

***Урок* 46** (п.7.4. Свойства косинуса и его график). Хотя свойства косинуса на промежутке [0°, 180°] уже вытекают из свойств синуса, но полезно их увидеть при движении радиуса единичной полуокружности.

***Урок* 47** (п. 7.5. Теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора)). Важнейшее применение косинуса — обобщённая теорема Пифагора, которую обычно называют *теоремой косинусов.* Эта теорема вместе с теоремой синусов позволяет уже решить любой треугольник.

***Урок* 48** (п. 7.6. Средние линии треугольника и трапеции). Теорема о средней линии треугольника доказывается с помощью теоремы косинусов. Её доказательство характерно для *геометрии вычислений*, когда надо «просто посчитать». Фактически в этом доказательстве доказывается подобие треугольника, отсечённого средней линией, исходному треугольнику. Таким способом далее в § 9 будет доказан один из признаков подобия треугольников и равенство углов подобных треугольников. Теорема о средней линии трапеции сводится к теореме о средней линии треугольника традиционным методом.

***Урок* 49** (п. 7.7. Применения косинуса в практике). В последнем пункте этого параграфа 7, используя теоремы синусов и косинусов, решаем двумя способами практическую задачу о нахождении расстояния между двумя недоступными предметами. Подготовка к контрольной работе № 3.

***Урок* 50** Контрольная работа № 3.

Синус и косинус

Вариант 1

1. В треугольнике ABC угол C — прямой, $\sin A = 0{,}8$, гипотенуза $AB = 6$. Найдите катеты треугольника, а также синусы и косинусы его острых углов.

2. Найдите площадь и длины диагоналей параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 8$ и углом $A = 45^\circ$.

3. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC; $AB = CD = 5$, $AD = 10$, $\angle A = 120°$. Найдите площадь трапеции.

4. Найдите косинусы углов граней тетраэдра $PABC$, если $PA = PB = PC = 13$ и $AB = BC = AC = 10$. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

Решение

1. $\sin A = \cos B = 0{,}8$; $\sin B = \cos A = 0{,}6$; $AC = 6\sin B = 3{,}6$; $BC = 6\sin A = 4{,}8$.

2. $\angle B = 135^{\circ}$. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B =$ $= 25 + 64 - 80(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 89 + 40\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{89+40\sqrt{2}}$, $BD^2 = 89 - 40\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{89-40\sqrt{2}}$ площадь параллелограмма $ABCD$ равна $20\sqrt{2}$.

3. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, её углы A и D — тупые. Проведём высоты AO и DM на сторону AD. Их длины равны. $AK = DM = 5\sin 60° = \frac{5}{2}\sqrt{3}$. Отрезки BO и MC равны и равны $5\sin 30° = 2{,}5$. Поэтому $BC = 10 + 2{,}5 + 2{,}5 = = 15$. Следовательно, площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(10 + 15)\,\frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{125}{4}\sqrt{3}$.

4. Грань ABC — равносторонний треугольник, его углы равны 60°. Площадь грани ABC равна $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60° = = 25\sqrt{3}$. Остальные грани тетраэдра — равнобедренные треугольники с основанием 10 и боковыми сторонами 13. Косинус угла при основании равен $\frac{5}{13}$, а косинус угла при вершине вычисляется по теореме косинусов: он равен $\frac{119}{169}$. Высоты этих граней, проведенные к основанию, равны 12 и площадь каждой из этих граней равна 60. Следовательно, площадь поверхности тетраэдра равна $180 + 25\sqrt{3}$.

<u>Вариант 2</u>

1. В треугольнике ABC угол C — прямой, $\cos B = 0{,}6$, гипотенуза $AB = 8$. Найдите катеты треугольника, а также синусы и косинусы его острых углов.

2. Найдите площадь и длины диагоналей параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$ и углом $B = 120^{\circ}$.

3. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC; $AB = CD = 3$, $BC = 6$, $\angle A = 60°$. Найдите площадь трапеции.

4. Найдите косинусы углов граней тетраэдра $PABC$, если $PA = PB = BC = = AC = 10$ и $AB = PC = 8$. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

Решение

1. $\sin A = \cos B = 0{,}6$; $\sin B = \cos A = 0{,}8$; $AC = 8\sin B = 6{,}4$; $BC = 8\sin A = 4{,}8$.

2. $\angle A = 60°$. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B =$ $= 16 + 36 - 48(-0{,}5) = 76$, $AC = 2\sqrt{19}$ $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A = 16 + 36 -$ $- 24 = 28$, $BD = 2\sqrt{7}$ площадь $ABCD$ равна $12\sqrt{3}$.

3. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, её углы B и C — тупые. Проведём высоты BO и CM. Их длины равны $3\cos 30° = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Отрезки AO и MD равны $3\sin 30° = 1{,}5$.

Поэтому $AD = 6 + 1{,}5 + 1{,}5 = 9$. Следовательно, площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(6+9)\,\frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{45}{4}\sqrt{3}$.

4. Все грани этого тетраэдра — равнобедренные треугольники с основанием равным 8 и боковыми сторонами, равными 10. Их высоты к основанию равны $2\sqrt{21}$, а площади равны $8\sqrt{21}$. Поэтому площадь поверхности тетраэдра равна $32\sqrt{21}$. Косинусы углов при основании равны 0,4, а косинусы углов при вершинах вычисляются по теореме косинусов и они равны 0,68.

§ 8. Тригонометрические функции (2 часа)

8.1. Тангенс. 8.2. Котангенс. 8.3. Из истории тригонометрии.

Этот параграф завершает изучение основ тригонометрии. Содержание его вполне традиционно. Отметим лишь, что введение тангенса также аргументируется решением практической задачи о нахождении высоты предмета по его тени. Важность этих двух тригонометрических функций существенно различна.

Продолжается знакомство учеников с историческим материалом. На этот раз они знакомятся с историей появления тригонометрических функций.

***Урок* 51** (п. 8.1. Тангенс). С тангенсом связаны не только решение прямоугольных треугольников, но и такие важнейшие в математике факты как угловой коэффициент графика линейной функции и геометрический смысл производной.

***Урок* 52** (п. 8.2. Котангенс и п. 8.3. Из истории тригонометрии). В школьной программе котангенс то появляется, то исчезает. Роль его в математике незначительна и аналогична роли секанса и косеканса. Но в последнем варианте Стандартов второго поколения котангенс присутствует, а потому авторы кратко о нём рассказывают.

§ 9. Подобные треугольники (3 часа)

9.1. Определение подобных треугольников. 9.2. Признаки подобия треугольников. 9.3. Свойства подобных треугольников.

Преобразование подобия любых фигур будет изучаться в 9 классе. Но главу «Геометрия треугольника» естественно завершить двумя параграфами о подобных треугольниках.

***Урок* 53** (п. 9.1. Определение подобных треугольников). Три основные, опорные для курса геометрии 8 класса теоремы — это теорема Пифагора, теорема синусов и теорема косинусов. Как их следствия можно получить разнообразные теоремы евклидовой планиметрии. В частности, из них легко получается теория подобия треугольников, если определить подобные треугольники как треугольники, стороны которых пропорциональны (равенство треугольников — частный случай их подобия). Именно так в п. 9.1. определяется подобие двух треугольников. Такое определение затем в 9 классе расширяется на определение подобия любых фигур.

***Урок* 54** (п. 9.2. Признаки подобия треугольников). Поскольку подобие треугольников определяется пропорциональностью их сторон, то остаются лишь два признака подобия треугольников. Первый из них вытекает из теоремы косинусов и своим частным случаем имеет первый признак равенства треугольников (заметим, что в теореме о средней линии треугольника речь идет о подобии с коэффициентом 0,5). Второй признак подобия треугольников вытекает из теоремы синусов и своим частным случаем имеет второй признак равенства треугольников. Доказательства обоих признаков ведутся чисто алгебраически.

***Урок* 55** (п. 9.3. Свойства подобных треугольников). Равенство соответственных углов подобных треугольников также выводится с помощью теоремы косинусов. Тригонометрия применяется и при доказательстве двух других свойств подобных треугольников: пропорциональности соответственных отрезков и отношения площадей.

§ 10. Применения теорем о подобии треугольников (8 часов)

10.1. Подобие треугольников и параллельность. Теорема Фалеса. 10.2. Фалес. 10.3. Применения подобия при решении задач на построение. 10.4. Построение среднего геометрического. 10.5. Пентаграмма и золотое сечение. 10.6. Точка пересечения медиан треугольника.

***Уроки* 56 и 57** (п. 10.1. Подобие треугольников и параллельность и п. 10.2. Фалес). Теоремы о подобии треугольников позволяют легко доказать теорему о пропорциональности отрезков, которые образуются на сторонах угла, пересеченных параллельными прямыми (п. 10.1). Частным случаем этой теоремы является теорема Фалеса. В п. 10.2 рассказывается об этом древнегреческом мудреце.

***Уроки* 58 и 59** (п. 10.3. Применения подобия при решении задач на построение и п. 10.4. Построение среднего геометрического). В п. 10.3 подобие применяется при делении отрезка на равные части и при построении четвертого пропорционального отрезка. О возможности разделить отрезок на равные части циркулем и линейкой говорилось ещё в 7 классе. Теперь теорема Фалеса позволяет это сделать. В этом же пункте рассказывается о методе подобия при решении задач на построение. И при построении среднего геометрического (п. 10.4) также применяется подобие треугольников.

***Урок* 60** (п. 10.5. Пентаграмма и золотое сечение). Деление отрезка в крайнем и среднем отношении (золотое сечение) и построение правильного пятиугольника приводится в п. 10.5. Также в этом пункте рассказано о роли золотого сечения в искусстве.

***Урок* 61** (п. 10.6. Точка пересечения медиан треугольника). В п. 10.6 в связи с теоремой о точке пересечения медиан треугольника (т. е. о центре масс треугольника) рассказано о методах механики, которые применял Архимед для решения геометрических задач.

***Уроки* 62 и 63**. Два урока посвящены решению задач перед контрольной работой № 4 по теме «Подобие треугольников».

***Урок* 64.** Контрольная работа № 4.

Подобие треугольников

Вариант 1

1. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, а O — точка пересечения её диагоналей; $BC = 4$, $AD = 12$, $BO = 5$. Вычислите DO. Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC.

2. Точка M лежит на стороне AB треугольника ABC и $AM : MB = 1 : 3$. Через точку M провели прямую, параллельную прямой AC. Она пересекает сторону BC в точке P. Длина $MP = 5$. Найдите: а) AC; б) площадь треугольника MBP, если площадь трапеции $AMPC$ равна 14.

3. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и медиане, проведенной из вершины этого угла.

Решение

1. Треугольники AOD и COB подобны с коэффициентом $12 : 4 = 3$. Поэтому $DO = 3BO = 15$. Отношение площадей треугольников AOD и BOC равно 9.

2. Треугольники ABC и MBP подобны с коэффициентом $4 : 3$. Поэтому $AC : MP = 4 : 3$. Следовательно, $AC = 20 : 3$. Если обозначить через x площадь треугольника MBP, то площадь треугольника ABC равна $x\left(\frac{4}{3}\right)^2$ и $x + 14 = x\left(\frac{4}{3}\right)^2$. Поэтому $x = 18$.

3. Применяем метод подобия. Пусть заданы угол α и отрезок m. Строим любой прямоугольный треугольник ABC с углом α в вершине A. Проводим медианы AM. Строим отрезок a^* как четвертый пропорциональный к отрезкам $a = BC$, m и AM, т. е. $a : a^* = AM : m$. Отрезок a^* — один из катетов искомого треугольника. Так же строим и второй его катет, а затем строим прямоугольный треугольник по двум катетам.

Вариант 2

1. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, а O — точка пересечения её диагоналей; $AO = 9$, $AD = 15$, $CO = 3$. Вычислите BC. Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M так, что прямые AC и KM параллельны, точка K лежит на отрезке AB и $AK : KB = 5 : 3$. Длина $AC = 16$. Найдите: а) KM; б) площадь трапеции $AKMC$, если площадь треугольника BMK равна 9.

3. Постройте равнобедренный треугольник по углу при основании и биссектрисе треугольника, проведенной к боковой стороне.

Решение

1. Треугольники AOD и COB подобны с коэффициентом $9 : 3 = 3$. Поэтому $AD : BC = 3$. Следовательно, $BC = 5$. Отношение площадей треугольников AOD и BOC равно 9.

2. Треугольники ABC и KBM подобны с коэффициентом $8 : 3$. Поэтому $AC : KM = 8 : 3$. Следовательно, $KM = 6$. Площадь треугольника ABC равна $9\left(\frac{8}{3}\right)^2 = 64$. Поэтому площадь трапеции $AKMC$ равна $64 - 9 = 55$.

3. Применяем метод подобия. Пусть заданы угол α и отрезок $к$. Строим любой равнобедренный треугольник ABC с углом α при основании AB. Проводим его биссектрису AK Строим отрезок c^* как четвертый пропорциональный к отрезкам $c = AB$, k и AK, т. е. $c : c^* = AK : k$. Отрезок c^* — основание искомого равнобедренного треугольника. Строим этот треугольник по основанию и двум прилежащим углам.

Итоговое повторение (6 часов)

Курс геометрии 7 и 8 классов уже содержит большинство важнейших результатов элементарной планиметрии. В оставшееся время полезно сделать обзор этих результатов, сочетая материал 7 и 8 классов. Этот обзор можно подкрепить тестовой проверкой.

***Урок* 65** (Треугольники: равенство и подобие.)

Равенство треугольников — это тема 7-го класса (она повторяется в пункте 1 *Введения*), подобие треугольников — тема 8-го класса (параграфы 9 и 10 учебника). Равенство — частный случай подобия, когда коэффициент подобия равен 1. Следует сравнить определения равенства и подобия, сравнить признаки и свойства, указать на их аналогии и на их отличия. Подобным треугольникам посвящен тест 9 учебника и тесты 24 и 25 книги для учителя.

***Урок* 66** (Треугольники: площади, тригонометрия, формулы.)

Это урок о формулах. Прежде всего, следует вспомнить теорему Пифагора — и как теорему о площадях, и её алгебраическую формулировку. А затем повторить те формулы, которые перечислены в учебнике в *Итогах*. В пособии для учителя этому материалу посвящены тесты 19—23 и 26—27.

***Урок* 67** (Расстояния и параллельность.)

О том, что параллельность двух фигур — это постоянство расстояния точек от одной фигуры до второй, говорилось в 7 классе. Стоило бы об этом сказать и в конце курса восьмого класса — ведь, опираясь на этот факт, можно корректно определить высоты параллелограмма и трапеции. Сравнению расстояний посвящены тест 4 в учебнике и тест 34 в книге для учителя. Конечно, перед трапециями и параллелограммами следует повторить пункт 2 *Параллельность* из Введения.

***Урок* 68** (Четырёхугольники. Параллелограммы и трапеции.)

В учебнике этот материал содержится в пунктах 1.3, 4.3, 5.1—5.4, 7.6. Стоит вспомнить, что четырёхугольник составлен из двух треугольников и может быть как выпуклым, так и невыпуклым, что сумма его углов равна 360°. Конечно, следует вспомнить формулы площадей трапеции и параллелограмма, свойства и признаки параллелограмма, свойства и признаки частных видов параллелограмма. В учебнике параллелограммам и трапециям посвящены тесты 5—8, а в учебном пособии тесты 6 и 35 посвящены четырёхугольникам общего вида, и многочисленные тесты относятся к параллелограммам и трапециям, а также к их частным видам. Не будем их перечислять

***Урок* 69** (Правильные многоугольники. Правильные призмы и пирамиды.)

В учебнике этот материал содержится в пунктах 1.4, 1.6, 5.5, 10.5. Прежде всего, следует вспомнить определение правильного многоугольника, затем сказать о центре правильного многоугольника и о разбиении правильного многоугольника на равные друг другу равнобедренные треугольники, вспомнить, как строятся циркулем и линейкой квадрат, правильные треугольники, шестиугольники и пятиугольники, но невозможно, например, построить циркулем и линейкой правильный семиугольник. В самом учебнике правильным многоугольникам посвящен тест 2, а в книге для учителя — тесты 7, 8, 10, 29, 30, 31. Реальные правильные пирамиды и призмы стоит поискать в архитектурных постройках.

***Урок* 70** (Геометрия вокруг нас. Архитектура — воплощённая геометрия.)

Этот урок может быть геометрической экскурсией. О том, как можно организовать геометрические экскурсии, подробно рассказано в разделе *Гуманитарная составляющая курса геометрии* (он написан Т. Г. Ходот) в книге для учителя к учебнику *Геометрия,7* (авторы: А. Д. Александров и др.).

2. Решения задач и указания к решению задач

Глава I. Площади многоугольных фигур

§ 1 Многоугольники и многоугольные фигуры

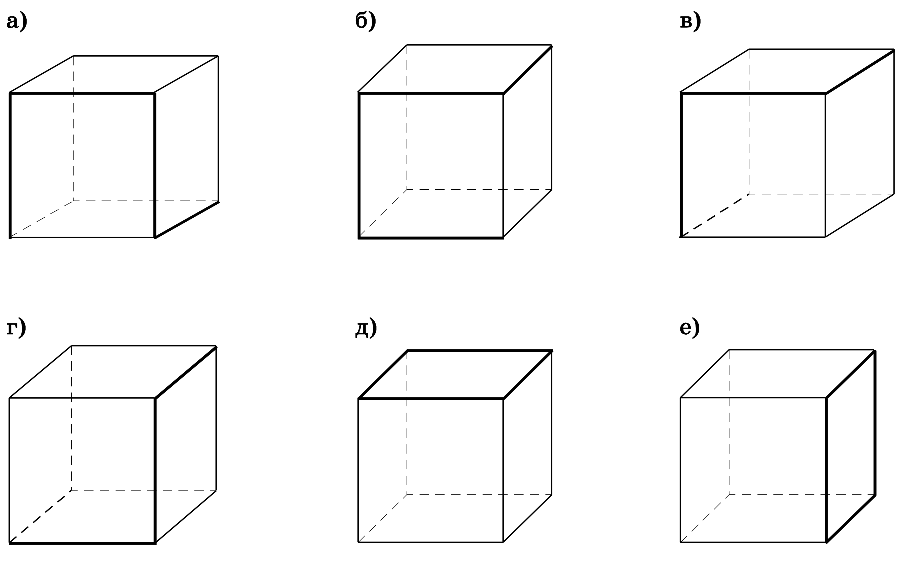


Рис. 1

1.9. а) Для случаев на рисунках 29 а)—г) возможны различные решения. Один из возможных вариантов указан на рис. 1, а)—г). В случаях д) и е) решение однозначно — это граница соответствующей грани куба. б) В случаях а)—г) пятизвенные ломаные возможны: они продолжают ломаные, указанные на рисунках 1, а)—г). В случаях д) и е) таких простых ломаных нет.

1.11. Сумма всех углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot n - 360°$. Внешний угол многоугольника равен разности между развёрнутым углом и смежным с ним углом многоугольника. Поэтому сумма всех внешних углов равна $180° \cdot n - (180° \cdot n - 360°)$, т. е. 360°.

1.16. Если каждые два соседних угла дают в сумме не больше 180°, то пять таких пар углов дадут в сумме не больше 900°, а потому (поскольку в предыдущем подсчете каждый угол пятиугольника учитывался дважды) сумма всех углов пятиугольника даст не больше 450°, что неверно.

1.17. Так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, а каждый тупой угол больше 90°, то тупых внешних углов не может быть больше трёх, а потому и острых углов в многоугольнике не может быть больше трёх.

1.18. а) Общее число сторон и диагоналей равно числу пар вершин, т. е. $n(n-1) : 2$.

Из этого числа надо вычесть число сторон, получится $n(n-3) : 2$.

б) Число треугольников получается, когда к числу пар вершин (упорядоченных) добавляется ещё одна. Таких «добавленных» вершин будет $(n-2)$. А потому $n(n-1)$ умножается на $(n-2)$. При этом каждая упорядоченная тройка вершин считается шесть раз (например, ABC, BCA, CAB, CBA, BAC, ACB). Поэтому число $n(n-1)(n-2)$ надо ещё разделить на 6. Поэтому ответ $n(n-1)(n-2) : 6$.

1.19. Сумма всех внешних углов равна 360°. а) Если каждый угол многоугольника меньше 90°, то каждый внешний угол больше 90°. Таких углов не может быть больше трёх. Поэтому многоугольником, у которого все углы острые может быть лишь треугольник. б) Если каждый угол многоугольника равен 90°, то каждый внешний угол равен 90°. И таких углов четыре. Таким многоугольником является прямоугольник. в) Если каждый угол многоугольника больше 90°, то их сумма больше, чем $90° \cdot n$. Из неравенства $180°(n-2) > 90° \cdot n$ получаем, что таких углов должно быть больше четырёх. Такой многоугольник существует при любом значении n, большем четырёх.

1.20. В случае в) это невозможно. В каждом узле сумма углов равняется 360°, а каждый угол такого восьмиугольника равен 135°. Уравнение $135° \cdot n = 360°$ не имеет решения в натуральных числах.

1.21. а) Для решения задачи сначала представим себе два равных квадрата. Если приложить их по целой стороне, то получим прямоугольник. Значит наименьшее число сторон — четыре. Если один из квадратов чуть подвинут, то получится восьмиугольник — наибольшее число сторон — восемь. Промежуточные числа — пять, шесть и семь — тоже можно получить, но уже деформируя эти квадраты. Убедитесь на рисунках. б) В этом случае число сторон может меняться от четырёх до 16. Наименьшее число — четыре получим, если наложим друг на друга два равных квадрата так, что одна сторона каждого из них станет средней линией другого, а наибольшее — шестнадцать — в случае, когда у равных квадратов общий центр, но они не совпадают.

1.22. Во всех этих условиях предполагается, что вершины четырёхугольника $ABCD$ ориентированы по (или против) часовой стрелки. а) $ABCD$ обладает свойствами ромба. б) $ABCD$ обладает свойствами параллелограмма. в) Надо рассмотреть два случая: четырёхугольник выпуклый или он невыпуклый. В обоих случаях равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC и симметричны относительно прямой BD. Относительно этой же прямой симметричен и четырёхугольник $ABCD$. г) Треугольники BAD и CDA равны (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому $AC = DB$ и $\triangle ABC = \triangle DCA$. Следовательно, $\angle B = \angle C$ и $\angle A + \angle B = 180°$. Поэтому стороны AD и BC параллельны. д) В таком четырёхугольнике противоположные стороны параллельны, так как $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle A + \angle D = 180°$. е) Так как $\angle A + \angle B = 180°$, то стороны AD и BC параллельны. Если $\angle A$ — прямой, то $ABCD$ — прямоугольник. Пусть это не так и угол A — острый. Тогда прямые AB и CD пересекаются в некоторой точке M. Получаем два равнобедренных треугольника ADM и BCM. Поэтому $AB = CD$. Треугольник ADM составлен из четырёхугольника $ABCD$ и треугольника BCM. Аналогично рассматриваем случай, когда угол A — тупой.

1.23. а) Да, если он не является выпуклым. б) Обозначим наименьший угол через x, а разность между углами — y. Получим уравнение $4x + 6y = 360$. Решим его относительно y. Получим $y = 60 - (2x) : 3$. Так как мы ищем натуральные решения, то x делится на 3. Получим, что x начинается с $x = 3$, а y начинается с 58.

1.24. Сравните с задачей 1.19: в четырёхугольнике может быть как три острых угла, так и три тупых угла.

1.25. а) и б). Может, например, в квадрате. в) Может, в том случае, когда четырёхугольник имеет угол, больший 180°, т. е. когда четырёхугольник — невыпуклый.

Пусть углы четырёхугольника x, y, z, v удовлетворяют неравенству $x \le y \le z \le v$.

Пусть $v > x + y + z$. Тогда верно, что $2v > x + y + z + v = 360°$, откуда $v > 180°$. Это означает, что наибольший угол больше 180°, т. е. четырёхугольник — невыпуклый.

1.26. Построение сводится к построению треугольника: а) по трём сторонам; б) по трём сторонам; в) двум сторонам и углу между ними; г) по двум сторонам и углу между ними, а затем по трём сторонам; д) по стороне и двум прилежащим углам. Исследование задачи здесь и далее не предполагается.

1.27. Так как можно произвольно менять угол между одной из пар фиксированных сторон, то таких четырёхугольников — бесконечное множество.

1.28. $180°(n - 2) : n$.

1.29. Утверждение а) доказано в теореме этого пункта, утверждение б) — это следствие этой теоремы, утверждение в) вытекает из равенства равнобедренных треугольников, имеющих вершинам центр правильного многоугольника, а основаниями — его стороны.

1.31. Центр правильного многоугольника — это точка пересечения серединных перпендикуляров любых двух непараллельных сторон этого многоугольника.

1.32. Можно. Сначала восстановим его центр как точку пересечения серединных перпендикуляров к его оставшимся сторонам. Затем соединим его отрезками с двумя соседними оставшимися вершинами. Полученный после этого треугольник в результате последовательного прикладывания к уже построенной фигуре даст искомый правильный многоугольник.

1.33. а) Возможны два случая: 1) диагонали, выходящие из одной вершины, упираются в соседние вершины шестиугольника; в этом случае угол между ними равен 30°; 2) диагонали не упираются в соседние вершины шестиугольника; в этом случае угол между ними равен 60°.

б) Возможны два случая: 1) обе диагонали проходят через центр шестиугольника; тогда угол между ними 60°; 2) одна диагональ проходит через центр, а другая — нет; в этом случае они взаимно перпендикулярны.

1.34. В каждом случае можно начать решение с нахождения углов треугольника, ограниченного двумя сторонами пятиугольника и одной его диагональю. Эти углы равны 36°, 36° и 108°. Углы между диагоналями, идущими из одной вершины, равны 36°, а между пересекающимися диагоналями равны 72°.

1.35. в) Можно соединить отрезками центр правильного многоугольника с его вершинами и на построенных отрезках (или их продолжениях) отложить от центра другие равные между собой отрезки. Получим вершины другого правильного многоугольника.

1.36. Если $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то: а) $AD = BE = CF$ и $AC = BD = CE = DF = EA = FB$; б) AD перпендикулярно FB; в) FB и CE параллельны.

1.37. а) Диагонали правильного пятиугольника являются основаниями равных друг другу равнобедренных треугольников, боковыми сторонами которых являются стороны правильного пятиугольника. б) Следует из того, что в получающемся четырёхугольнике сумма углов, прилежащих к стороне пятиугольника, равна 180°.

1.38. а) Достаточно в правильном шестиугольнике $ABCDEF$ симметрично отразить стороны AB и BC относительно прямой AC и сделать его невыпуклым. б) Можно сделать шестиугольник, в котором параллельны каждые две стороны, идущие через две, а каждый угол равен 120°. Такой шестиугольник можно получить из правильного треугольника, проведя три неравные хорды, каждая из которых параллельна противоположной стороне треугольника.

1.39. а) Центр равноудален от всех вершин правильного многоугольника; б) все серединные перпендикуляры сторон правильного многоугольника проходят через его центр.

1.40. Не являются многоугольными фигурами на рисунке 47 фигуры д), е), и), л).

1.43. Сначала разбить его на равные равнобедренные треугольники, вершины которых находятся в центре правильного многоугольника, а затем каждый такой треугольник разбить на 2 прямоугольных треугольника высотой, выходящей из его вершины.

1.46. Их можно составить из двух симметричных пирамид, когда плоскостью симметрии является общая плоскость их оснований.

1.47. На шесть пирамид.

1.48. Число рёбер пирамиды равно удвоенному числу сторон её основания, т. е. чётно.

1.49. Такой многогранник может иметь 9, 10, 11 или 12 граней: девять, если удалили вершину большого куба; десять, если удалили часть ребра, не удаляя вершин; одиннадцать, если удалили часть грани, не без вершин и сторон; двенадцать, если меньший куб не имел общих точек с поверхностью большого куба.

1.50. Любые по числу сторон от 3 до 6.

1.51. а) Можно рассмотреть правильную четырёхугольную пирамиду, у которой все рёбра равны. Можно также рассмотреть многогранник, составленный из двух тетраэдров с общей гранью. б) Можно рассмотреть, например, многогранник, который получится из тетраэдра, если от тетраэдра отсечь плоскостью другой тетраэдр.

1.52. Нет, это неверно. В тетраэдре $PABC$ могут выполняться такие равенства рёбер: $PA = BC$, $AB = PB = PC = = AC$.

§ 2 Площадь многоугольной фигуры

2.1. Найдём площадь объединения. Для этого сложим площади обеих данных фигур. При этом получится избыток, равный площади пересечения (которая считается дважды). В результате получаем нужную зависимость.

2.7. б) Любая прямая, проходящая через центр прямоугольника, разбивает его на две равновеликие части. в) Любая высота разбивает его на равные, а значит и равновеликие треугольники.

2.8. Проведем высоту AH на наибольшую сторону BC треугольника ABC. Из точки K — середины стороны AB — опустим перпендикуляр KP на сторону BC. Прямоугольный треугольник KPB повернём вокруг вершины K на 180°. Его вершина B перейдёт в точку A, а вершина P перейдет в точку T, симметричную точке P относительно точки K. Треугольник AHB мы «перестроили» в прямоугольник $AHPT$. Аналогично треугольник AHC «перестраивается» в некоторый прямоугольник $AHMX$, прилегающий к прямоугольнику $AHPT$ по стороне AH. Треугольник ABC разбит на части, из которых составлен прямоугольник $PTXM$.

2.9. Каждый из нарисованных треугольников «включаем» в прямоугольник, на сторонах которого лежат вершины соответствующего треугольника. Тогда треугольник оказывается дополнен прямоугольными треугольниками до этого прямоугольника. Их площади равны половине площадей прямоугольников, стороны которых равны катетам прямоугольных треугольников.

2.10. Решение аналогично решению задачи **2.9.**

2.22. Каждая из полученных частей является прямоугольником. У этих прямоугольников равны по одной стороне и площади, значит, и другие стороны равны. Отсюда следует, что проведённая прямая делит сторону исходного прямоугольника пополам, а потому полученные периметры равны. Обратное тоже верно: если отрезок, перпендикулярный сторонам прямоугольника делит пополам его периметр, то он проходит через центр прямоугольника, а потому делит пополам и его площадь.

2.23. Разрежем куб со стороной a на n^3 кубов со сторонами $a : n$. Их суммарная площадь поверхностей равна $n^3 \cdot 6(a : n)^2 = 6a^2n$, т. е. в n раз больше площади поверхности исходного куба.

2.24. Из куба со стороной 1 м получается 1000 кубов со стороной 1 дм. Поэтому высота получившегося столба равна 1000 дм, т. е. 100 м. Кубиков со стороной 1 см уже будет 1000 000 и высота столба станет равной 1000 000 см, т. е. 1 000 000 см = = 10 км. А из кубиков с ребром 1 мм получится столб 10 000 км.

2.25. Если сторона квадрата равна a, то его периметр $P = 4a$, а площадь $S = a^2$. Поэтому $P^2 = 16S$. Если стороны прямоугольника a и b, то его периметр $P = 2(a + b)$, а $S = ab$. Известное неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$ приводит к такому неравенству:

$$P^2 = 4(a^2 + b^2 + 2ab) \geq 16S.$$

Равенство имеет место лишь для квадрата.

2.26. а) Это квадрат со стороной 2. б) Да, так как вторую сторону прямоугольника можно сделать достаточно малой. Числа $S = 4$ и $P = 10^6$ удовлетворяют изопериметрическому неравенству $16S \leq P^2$. Чтобы найти сторону a такого прямоугольника, надо решить уравнение $4a^2 - Pa + 4S = 0$. в) Такого прямоугольника нет, так не выполняется изопериметрическое неравенство $16S \leq P^2$.

2.27. а) Площадь маленького квадрата равны $\frac{4}{9}$ площади большого, а площадь оставшейся части равна $\frac{5}{9}$ площади большого квадрата. б) 19%.

2.28. Проще всего взять страницу учебника, на которой находится эта задача.

2.30. Сначала выясним, какая площадь земли требуется дереву для поддержания жизни. Затем подберём прямоугольник с такими сторонами, которые обеспечивают не меньшую площадь. Затем выберем такие размеры, при которых выбранный прямоугольник укладывается целое число раз как по длине, так и по ширине. Затем поделим площадь участка на рассчитанную площадь прямоугольника, окружающего каждое дерево. Разумеется, все измерения и расчёты будут приближёнными.

2.31. Верно лишь утверждение а). Остальные утверждения неверны, что устанавливается приведением контрпримеров.

§ 3 Теорема Пифагора

3.10. г) Пусть $AB = c$, $AC = x$, $BC = y$ и $BK = m$. Тогда $x^2 + y^2 = c^2$ и $x^2 + 0{,}25y^2 = m^2$. Решая эту систему, находим катеты.

3.21. При вычислении потребуется использовать перпендикулярность ребра куба к плоскости его грани, имеющей с этим ребром общую вершину куба. Из чего следует, что ребро куба перпендикулярно той диагонали грани куба, которая имеет с этим ребром общую вершину куба. О перпендикуляре к плоскости было рассказано в учебнике «Геометрия, 7» в п. 6.1.

3.25. При вычислении потребуется использовать перпендикулярность ребра прямоугольного параллелепипеда к плоскости его грани, имеющей с этим ребром общую вершину прямоугольного параллелепипеда. Из чего следует, что ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно той диагонали грани прямоугольного параллелепипеда, которая имеет с этим ребром общую вершину прямоугольного параллелепипеда.

3.26. а) $4 - y^2 = 1 - x^2$; б) $x^2 - 1 = y^2 - 4$; в) $y^2 - 4 = 1 - x^2$; г) $x^2 - 1 = y^2 - 4$; д) $1 - x^2 = 4 - (x + y)^2$; е) $4 = (x + \sqrt{1-y^2})^2 + y^2$; ж) $0{,}25(b - a)^2 + x^2 = y^2$; з) $\sqrt{x^2-a^2} + \sqrt{y^2-a^2} = a$; и) $x^2 - 16 = y^2 - 1$ и $x^2 + y^2 = 25$, т. е. $x = \sqrt{20}$ и $y = \sqrt{5}$.

3.27. Возможны два случая в зависимости от того, пересекает ли общая хорда этих окружностей отрезок, соединяющий их центры. Формула, связывающая величины, данные в задаче такова: $\sqrt{R_1^2 - \frac{d^2}{4}} \pm \sqrt{R_2^2 - \frac{d^2}{4}} = a$.

3.28. Пусть некоторая точка M находится внутри прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $BC = b$. Известны расстояния MA, MB, MC. Найдём MD. Зная стороны треугольника MAB, найдём его высоту $MH = m$, т. е. расстояние от точки M до стороны AB. А тогда расстояние от M до стороны CD равно $b - m$. Аналогично находим высоту $MP = p$ в треугольнике MBC и расстояние $a - p$ от точки M до стороны AD. Расстояние MD — это диагональ прямоугольника, стороны которого равны $a - p$ и $b - m$.

Аналогично решается задача и при другом положении точки, только возможно потребуется находить уже расстояния не до сторон прямоугольника, а до их продолжений. Вообще говоря, требуется рассматривать много аналогичных случаев.

Задача подходит для групповой работы.

3.29. а) Пусть заданы взаимно перпендикулярные хорды $CA = b$ и $CB = a$ некоторой окружности с центром O. Отсюда следует, что сумма углов OCB и OCA при основаниях равнобедренных треугольников OCB и OCA равна 90°, то сумма углов COB и COA при их вершинах равна 180°, а потому радиусы OB и OA составляют гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b. Следовательно, $OA = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. б) Если точка пересечения хорд M не совпадает с центром O круга, то OM является диагональю квадрата, две стороны которого — перпендикуляры, опущенные из O на данные хорды. Эти перпендикуляры являются катетами треугольников с гипотенузой R и другим катетом $0{,}5d$.

3.30. Пусть в круге с центром O проведён диаметр AB и перпендикулярная ему хорда CD, пересекающая AB в некоторой точке M. Заданы $MA = a$ и $MB = b$. Рассмотрим треугольник ABC. Он составлен из равнобедренных треугольников OAC и OBC. Поскольку сумма углов AOC и BOC равна 180°, то отсюда следует, что сумма углов ACO и BCO равна 90°, а потому треугольник ABC — прямоугольный. Если $CM = x$, то $x^2 + a^2 + x^2 + b^2 = (a + b)^2$, а потому $x^2 = ab$ и $CD = 2x$.

3.31. Будем считать берега реки прямолинейными, а движение гребца, идущем в направлении, перпендикулярно берегу. Реку полагаем достаточно широкой. Тогда результирующая скорость равна 5 км/ч. После чего найдём искомое расстояние.

Другой способ. Можно найти горизонтальную и вертикальную составляющую его пути за 40 мин, после чего найти искомое расстояние.

(Полезно проконсультироваться с учителем физики.)

3.32. Будем искать наибольшее число таких досок. Найдём в круге, заданном тонким концом бревна, расстояние между двумя параллельными хордами длиной 360 мм (или 270 мм) разделим его на 30 мм. Найдём целую часть полученного числа. Для хорд 360 мм это расстояние равно 270 мм и число досок равно 9 (если не учитывать ширину распила), а для хорд 270 мм расстояние равно 360 мм и число досок равно 12. Реально должны получится 8 или 11 досок.

3.33. В решении не учитываем провисание провода. Пусть AB и CD мачты, AC — расстояние между ними. Проведём $BK \perp CD$ и найдём AD из треугольника AKD.

3.34. Обозначим глубину водоёма x. Тогда длина шеста $x + 1$. После того как камыш уткнулся в берег, он сам, глубина водоёма и половина стороны водоёма образуют прямоугольный треугольник, из которого получаем уравнение $(x + 1)^2 - x^2 = 25$, отсюда получаем $x = 12$.

3.35. Пусть вертикальный отрезок AB изображает шест. $AB = 0{,}5$. Его верхний конец A опустили по вертикали до точки C на стене. $AC = 0{,}1$. Тогда $CB = 0{,}4$. Точка B сместилась при этом по горизонтали до положения D. При этом шест $CD = 0{,}5$. По теореме Пифагора имеем $BC^2 + BD^2 = CD^2$. Или $(0{,}4)^2 + BD^2 = (0{,}5)^2$. Отсюда находим $BD = 0{,}3$.

3.36. Строим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Его гипотенуза равна $a\sqrt{2}$. На этой гипотенузе строим второй прямоугольный треугольник с катетами a и $a\sqrt{2}$ *. Получаем новую гипотенузу, равную $a\sqrt{3}$. И продолжаем процесс, до тех пор пока не построим то, что требуется.

3.38. Пусть в прямоугольном треугольнике катеты a и b, их проекции на гипотенузу a_1 и b_1, высота на гипотенузу c равна h.

а) Имеем: $c^2 = (a_1 + b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2\,a_1b_1 = a^2 - h^2 + b^2 - h^2 + 2a_1b_1 = c^2 - 2h^2 + 2\,a_1b_1$. Отсюда и получаем, что $h^2 = a_1b_1$.

б) $a^2 = a_1^2 + h^2 = a_1^2 + a_1b_1 = a_1(a_1 + b_1) = a_1c$.

3.42. Из утверждения этой задачи вытекает такое предложение: если на прямой a фиксированы две точки A и B, то множество точек M таких, что разность $MA^2 - MB^2 = c$ постоянна, является прямой. Действительно, если точка O — проекция точки M на прямую a, то $AO^2 - BO^2 = c$. Разность $AO^2 - BO^2 = (AO + BO)(AO - BO)$. В этом произведении один из сомножителей равен AB: если точка O лежит на отрезке AB — то сумма, а если вне отрезка AB — то разность. Поэтому второй сомножитель равен $c : AB$ и однозначно определяет точку O. Следовательно, все точки M лежат на прямой, перпендикулярной прямой a и проходящей через точку O.

Следствие. Если точка является серединой заданного отрезка и из неё проведён перпендикуляр к этому отрезку, то разность квадратов наклонных, соединяющих точку на этом перпендикуляре и концы данного отрезка, равна разности квадратов проекций этих наклонных, то есть нулю. Но тогда эти наклонные равны. Верно и обратное. Отсюда получаем характерное свойство серединного перпендикуляра к данному отрезку.

3.43. Следует рассмотреть разные виды данного равнобедренного треугольника. В частности, если этот треугольник тупоугольный, то проекции основания на прямые, проходящие через его боковые стороны, выходят за треугольник.

§ 4 Площадь треугольника и трапеции

4.1—4.2. Произведения, о которых говорится в этих задачах, являются удвоенной площадью треугольников.

4.5. Лишь для рисунка 102 е) по данным этого рисунка даётся числовой ответ — 0,25. В остальных случаях для числового ответа необходимо указать длины отрезков, находящихся внутри закрашенной (или незакрашенной) части квадрата.

4.6. Для всех многогранников площади их граней можно найти по их ребрам.

4.7. Не следует. Треугольник с громадным периметром может иметь сколь угодно маленькую площадь ввиду того, что высота может быть сколь угодно малой.

4.22. Пусть есть два треугольника OA_1B_1 и OA_2B_2, причём точка A_2 лежит на луче OA_1, а точка B_2 лежит на луче OB_1. Проведём отрезок A_2B_1, обозначим площадь треугольника OA_1B_1 как x, площадь треугольника OA_2B_1 как y, площадь треугольника OA_2B_2 как z. Имеем: $x : y = OA_1 : OA_2$, $y : z = OB_1 : OB_2$. Перемножая почленно оба равенства, получим требуемое.

4.23. б) Если M — точка медианы AA_1, то треугольники MBA_1 и MCA_1 равновелики, равны их высоты из точек B и C на общую сторону AA_1, а потому равновелики треугольники ABM и ACM. в) Положение точки M в этом случае определится равновеликостью треугольников ABM, ACM и BCM. А площадь треугольника MBA_1 будет равна половине площади треугольника ABM. Значит такой точкой M будет такая точка, которая делит медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины A.

4.24. Проведём высоту h_a из вершины основания на боковую сторону a (или её продолжение). Имеем: $S = 0{,}5ah_a$. Так как h_a не превосходит стороны a, то наибольшее значение площади получится, когда $h_a = a$.

4.25. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — правильный n — угольник, точка O — его центр. Соединим отрезками точку O со всеми вершинами этого многоугольника. Площадь любого из них равна половине произведения стороны многоугольника на высоту треугольника.

Площадь всего многоугольника равна сумме площадей всех полученных равных равнобедренных треугольников разбиения. У всех этих треугольников разбиения одна и та же высота, а сумма оснований всех этих треугольников равна периметру данного многоугольника. Отсюда и вытекает нужная формула.

4. 27. а) На двух параллельных прямых. б) На поверхности цилиндра вращения.

4.28. Тот, у которого медиана перпендикулярна основанию, т. е. равнобедренный треугольник.

4.29. Проведём отрезок BX и рассмотрим площади трёх треугольников: S — данного, а также полученных — s_1 и s_2. Пусть боковая сторона треугольника равна a, а перпендикуляры на боковые стороны из точки X равны h_1 и h_2. Тогда $S = s_1 + s_2 = 0{,}5ah_1 + 0{,}5ah_2 = 0{,}5a(h_1 + h_2)$. Из этого равенства видна независимость суммы перпендикуляров от выбора точки $X : h_1 + h_2 = 2S : a$.

Это рассуждение не проходит для точки X внутри треугольника ABC, если его основание не равно боковой стороне, но в том случае, когда треугольник ABC — равносторонний со стороной a, сумма перпендикуляров $h_1 + h_2 + h_3 = 2S : a$.

4.30. Пусть одна из диагоналей разбивается точкой пересечения на отрезки a_1 и a_2, а другая диагональ разбивается точкой пересечения на отрезки b_1 и b_2. Одной из диагоналей четырёхугольник разбивается на два треугольника площадями S_1 и S_2.

Тогда имеем: $2S_1 = (a_1 + a_2)b_1$ и $2S_2 = (a_1 + a_2)b_2$. Сложив эти два равенства почленно, получаем требуемое.

Для невыпуклого четырёхугольника утверждение также верно, только в процессе выкладки надо будет вычесть из большей площади треугольника меньшую.

Если угол между диагоналями не будет прямым, то формула изменится.

4.31. Да, так как их площади равны квадрату стороны, на которой они построены, с одним и коэффициентом $0{,}25\sqrt{3}$. При этом неважно, как расположены построенные треугольники относительно данного.

4.33. а) $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; б) если основание b и боковая сторона a, то $S = \dfrac{b}{2}\sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}}$.

4.36. а) Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция с боковыми сторонами AB и CD. Из точек B и C проведем высоты BK и CM. Тогда прямоугольные треугольники ABK и DCM равны по катету и гипотенузе. Из равенства этих треугольников и вытекает равенство углов при основании равнобедренной трапеции. б) Равенство $AC = BD$ следует из равенства треугольников ACD и ABD (по двум сторонам и углу между ними). в) Если продолжить боковые стороны трапеции до пересечения в точке P, то получится равнобедренный треугольник с вершиной в точке P ось симметрии которого и будет осью симметрии трапеции.

4.37. Продолжив боковые стороны трапеции до пересечения, получим два равнобедренных треугольника: больший из них составлен из трапеции и меньшего треугольника. Боковые стороны трапеции равны разности боковых сторон этих треугольников, а потому равны.

4.38. Равнонаклонность диагонали следует из равенства накрест лежащих углов между диагональю и основаниями.

4.41. Полагаем, что в трапеции $ABCD$ основание BC — меньшее из оснований. Через точку B проведём прямую a, параллельную боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Эта прямая пересечёт прямую AD в некоторой точке M. Высота треугольника ABM равна высоте трапеции $ABCD$, а стороны этого треугольника равны соответственно AB, CD и AD — BC. Зная стороны этого треугольника, можно найти его высоту, а значит и площадь трапеции $ABCD$.

4.48. См. задачу 1.37.

4.49. Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O.

а) Из равенства треугольников ABD и ACD следует равенство углов OAD и ODA, а из него равенство AO и OD (аналогично BO и OC).

б) Расстояния от точки O до прямых, проходящих через боковые стороны трапеции, равны, так как они являются длинами высот, проведённых в равных треугольниках на соответственно равные стороны. Расстояния до боков также равны, так как либо они являются этими высотами, либо равными отрезками диагоналей (если в треугольниках ABO и DCO будут тупые углы при вершинах B и C).

в) Пусть $AO > OC$. Отложим на AO отрезок $OM = OC$, а на DO — отрезок $ON = OB$. Так как треугольники BOC и MON равны, то равны их высоты. Но высота треугольника MON меньше высоты треугольника AOD.

Если $AO = OC$, то получим вместо трапеции параллелограмм, а потому обсуждение этого случая стоит отложить до следующего параграфа.

4.50. Сумма двух углов, прилежащих к боковой стороне трапеции равны 180°. Поэтому либо они оба прямые, либо один из них острый, а другой тупой. Поэтому либо, трапеция прямоугольная, у которой два прямых угла, один острый угол, а другой — тупой, либо у трапеции два острых и два тупых угла.

4.51. Это неверно для прямоугольной трапеции.

§ 5 Параллелограмм и его площадь

5.1. б) Следует из равенства двух полученных треугольников, учитывая, что противоположные стороны параллелограмма равны (теорема 5.2.)

5.6. Достаточно через центр симметрии параллелограмма провести его хорду, отличную от диагонали.

5.8. в) В задаче следует рассмотреть два случая.

1) Если в параллелограмме смежные стороны равны, то каждая из них равна 0,5 м. Тогда диагональ, разбивающая параллелограмм на два равнобедренных треугольника, будет равна 0,6 м.

2) Если в параллелограмме смежные стороны не равны, то диагональ, разбивающая его на два равнобедренных треугольника, равна какой-либо стороне параллелограмма. Обозначим эту сторону параллелограмма через a, а другую через b. Согласно условию, имеем систему: $a + b = 1$, $2a + b = 1{,}6$. Отсюда получаем: стороны параллелограмма равны 0,6 м и 0,4 м, а диагональ равна 0,6 м.

5.10. а) В треугольнике, ограниченном биссектрисами и одной из сторон параллелограмма, сумма острых углов равна 90°, а потому этот треугольник — прямоугольный. б) Биссектрисы могут совпадать, если смежные стороны параллелограмма равны. В этом случае совпадающие биссектрисы становятся диагональю параллелограмма. Если биссектрисы не совпадают, то они вместе с частями сторон параллелограмма (или их продолжениями) являются сторонами четырёхугольника. В этом четырёхугольнике две противоположные стороны параллельны как части сторон (или их продолжения) исходного параллелограмма. Далее достаточно доказать, что и другие две стороны этого четырёхугольника параллельны между собой. Для этого достаточно заметить, что биссектрисы образуют с каждой из прямых, на которых лежат стороны параллелограмма, равные углы.

5.11. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ и прямая MP пересекает стороны AD и BC (точка M лежит на AD). Достаточно доказать, что треугольники AOM и COP равны. У них есть по равной стороне: $AO = OC$. У них также равны все соответственные углы. Отсюда и следует равенство отрезков MO и OP.

5.12. Пусть даны стороны параллелограмма a, b и высота h. Высота параллелограмма должна быть не больше хотя бы одной из сторон параллелограмма. Пусть (для определённости) $h \leq b$. Проведём прямую p, возьмём точку K на этой прямой и проведём перпендикуляр $KB = h$ к этой прямой. Затем с центром в точке B проведём дугу окружности радиусом b. Пусть эта дуга пересекает прямую p в точке A. Проведём затем через точку B прямую q, параллельную прямой p, и отложим на прямой q отрезок $BC = a$. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB и пусть она пересекает прямую p в точке D. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм по определению.

5.14. а) Если диагональ четырёхугольника разбивает его на два равных треугольника, то этот четырёхугольник — параллелограмм. Утверждение неверно (рис. 2).

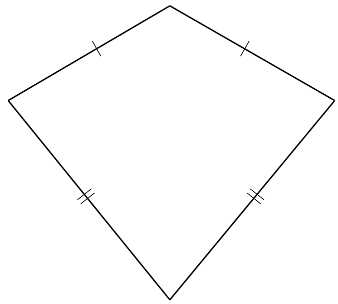


Рис. 2

б) Если в четырёхугольнике есть две пары равных противоположных сторон, то такой четырёхугольник — параллелограмм. Утверждение верно. в) Если в четырёхугольнике есть две пары равных противоположных углов, то такой четырёхугольник — параллелограмм. Утверждение верно. г) Если в четырёхугольнике точка пересечения диагоналей делит их пополам, то такой четырёхугольник — параллелограмм. Утверждение верно. Доказательства верных утверждений даны в учебнике в п. 5.2.

5.19. Во всех трёх случаях строим треугольник по трём сторонам и достраиваем его до параллелограмма.

Указание. Решение задачи сводится к построению треугольника: а) по трём сторонам; б) двум сторонам (половины диагоналей) и углу между ними; в) трём сторонам (сторона и половины диагоналей).

5.20. Построение, выполненное в пункте а), подсказывает, как решить задачу в п.б).

Указание. Для решения задачи разобьём трапецию на параллелограмм и треугольник. Затем строим треугольник по трём сторонам (две боковые стороны трапеции и разность её оснований) и к полученному треугольнику пристраиваем параллелограмм, дополняя треугольник до трапеции.

5.21. Это следует из третьего признака параллелограмма.

5.22. Для доказательства этого признака удобно применить построение, сделанное в предыдущей задаче.

5.23 и **5.24.** Эти утверждения следуют из четвертого признака параллелограмма.

5.25. а) Отрезок AC — общая диагональ параллелограммов $ABCD$ и $AMCP$. Поэтому все три их диагонали проходят через одну точку — середину отрезка AC. б) $BMDP$ — параллелограмм по третьему признаку параллелограмма.

5.26. Нет, не всегда (см. рис. 2). Необходимо равенство противоположных сторон.

5.27. В первых четырёх случаях а)—г) параллелограмм восстанавливается однозначно. д) Если не указано, какая из трёх оставшихся вершин противоположна стёртой вершине, то по этим трём точкам можно построить три разных параллелограмма, имеющих эти точки своими вершинами. Какой из них был стёртым, без дополнительной информации узнать нельзя. Поэтому однозначно восстановить исходный параллелограмм не получится. е) Две из трёх оставшихся точек определяют среднюю линию параллелограмма, а таких пар точек — 3, поэтому однозначно восстановить исходный параллелограмм не получится.

Указание. В задаче возможны два случая.

5.29. Дать начальный толчок в решении этой задачи можно, указав способ Фалеса в нахождении расстояния до недоступного предмета (п. 10.2 в учебнике). А затем использовать свойства сторон и диагоналей параллелограмма. Обширный материал на эту тему имеется в главе «Геометрия у реки» книги «Занимательная геометрия» Я. И. Перельмана.

Указание. В задаче б) воспользуемся тем, что диагональ ромба является биссектрисой его угла.

Ромб можно получить, перегнув лист бумаги по его диагонали и отогнув выступающие его части.

Квадрат можно получить, перегнув лист бумаги так, что его меньшая сторона пойдёт по большей и отогнув выступающую часть.

5.37. г) Через данную точку проведём прямую, параллельную оставшейся стороне. Затем с центром в оставшихся вершинах ромба проведём две окружности радиусом, равным стороне ромба.

5.38. В случае б) угол этого ромба равен 60°, а в случае в) — это квадрат. Во всех трёх случаях сторона ромба равно 20 см. Построение каждого такого ромба с помощью чертёжных инструментов (циркуля, линейки, угольника транспортира) на листе бумаги или картона труда не составляет. Слово *построить* указывает, что такой ромб после выполненного построения можно потом вырезать.

Указание. В задаче б) воспользуемся тем, что диагональ ромба является биссектрисой его угла.

5.39. в) Надо рассмотреть два случая: 1) данная диагональ является хордой данного угла или 2) она выходит из вершины его. В первом случае строим равнобедренный треугольник по основанию (заданной диагонали) и углу при вершине (заданному углу). Во втором случае строим равнобедренный треугольник по основанию (заданной диагонали) и углу при основании, равной половине заданного угла. Построенный треугольник затем достраиваем до ромба.

Указание. Ромб можно получить, перегнув лист бумаги по его диагонали и отогнув выступающие его части.

Квадрат можно получить, перегнув лист бумаги так, что его меньшая сторона пойдёт по большей, и отогнув выступающую часть.

5.40. в) Для каждой из оставшихся точек строим симметричную точку относительно середины оставшейся диагонали. Если построенная точка не совпадает с данной, то, тем самым, определятся две прямые, на которых лежат противоположные стороны прямоугольника. Расстояние между этими прямыми есть длина одной из сторон прямоугольника. Строим через точку пересечения диагоналей прямую, перпендикулярную построенным прямым и там, где она пересекает проведённые прямые, получаем середины сторон прямоугольника, а затем и сам прямоугольник. Если же оставшиеся точки симметричны относительно середины оставшейся диагонали прямоугольника, то задача имеет бесконечное множество решений.

5.42. г) Середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба; д) середина основания, середины боковых сторон и вершина треугольника являются вершинами ромба.

5.46. Если у ромба угол равен 60°, то его диагональ равна его стороне.

5.47. Это сделать невозможно, так как нет точки, равноудалённой от всех вершин ромба. А это следует из того, что серединные перпендикуляры к противоположным сторонам ромба параллельны.

5.49. Так как данные параллелограммы равновелики, то они при заданном основании имеют одну и ту же высоту. Следовательно, противоположные стороны параллелограммов лежат на одной прямой. Таких прямых — две. Если параллелограммы не лежат в одной плоскости, то эти прямые образуют цилиндрическую поверхность.

5.51. б) Так как известны диагонали, то известны их половины. Эти половины вместе со стороной параллелограмма задают треугольник, площадь которого можно найти и которая составляет четверть площади исходного параллелограмма.

5.55. Наибольшую площадь имеет параллелограмм, стороны которого перпендикулярны, так как высота параллелограмма не может превосходить его стороны, а равенство высоты и стороны достигается именно тогда, когда они перпендикулярны. Поэтому наибольшую площадь из всех параллелограммов с фиксированными сторонами имеет прямоугольник.

5.56. а) Если равны периметры квадрата и ромба, то равны их стороны. Наибольшую площадь имеет ромб, стороны которого перпендикулярны, так как высота ромба не может превосходить его стороны, а равенство высоты и стороны достигается именно тогда, когда они перпендикулярны. Поэтому наибольшую площадь из всех ромбов с фиксированными сторонами имеет квадрат.

б) Пусть площади квадрата и ромба равны. Тогда $a^2 = bh$, где a — сторона квадрата, b — сторона ромба, h — высота ромба. Логически возможны три случая. Пусть $a = b$. Тогда периметры их равны. Пусть $a > b$. Так высота ромба не больше его стороны, то $a > h$. Но тогда их площади не могут быть равны, что противоречит условию. Пусть $a < b$. Тогда периметр квадрата меньше периметра ромба.

5.57. Нужные формулы получатся, если считать параллелограмм и треугольник предельными случаями трапеции. Площадь параллелограмма получается при равенстве оснований трапеции (трапеция вырождается в параллелограмм). Площадь треугольника получается, когда одно из оснований вырождается в точку (трапеция вырождается в треугольник).

5.58. а) Прямая призма, основание которой — треугольник на первой проекции, а ребро равно ребру куба; б) прямая призма, основание которой — трапеция на первой проекции, а ребро равно ребру куба; в) наклонная призма, основания которой — два квадрата на нижней и на верхней гранях куба; они выделены на нижней проекции.

5.65. Каждая пара параллельных рёбер параллелепипеда задаёт диагональное сечение, являющееся параллелограммом. Таких пар 6.

5.66. Число сторон сечения от 3 до 6.

Задачи к главе I

I.1. а) Трапеция, б) параллелограмм, в) ромб.

Решение. а) Обозначим стороны прямоугольника a и b. Тогда его площадь равна ab. Согласно условию $a^2 + b^2 = 1$. Поэтому вместо площади удобнее рассматривать её квадрат a^2b^2. Так как сумма этих положительных сомножителей постоянна (равна 1), то наибольшее значения их произведения достигается тогда, когда эти сомножители равны, т. е. $a^2 = b^2$, откуда $a = b$. Сие означает, что наибольшую площадь из всех прямоугольников с заданной диагональю будет иметь квадрат.

б) Согласно условию периметры прямоугольника и квадрата равны 2, тогда сторона квадрата равна 0,5 и его площадь равна 0,25. Полупериметр прямоугольника равен 1. Если одну его сторону обозначим как x, то его смежная сторона равна $1 - x$, а площадь равна $x\,(1 - x)$. Так как сумма этих сомножителей постоянна, то их произведение достигает наибольшего значения, когда они равны, т. е. при $x = 0{,}5$.откуда следует, что наибольшую площадь имеет квадрат.

в) Назовём квадрат $KLMN$ (точка K лежит на стороне AD, точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, точка N лежит на стороне CD). Треугольники AKL и MCN — равносторонние. Следовательно, их углы равны 60°, а потому в треугольниках LBM и KDN углы, прилежащие к сторонам квадрата равны по 30°. Поэтому эти равнобедренные треугольники равны, а потому равны их боковые стороны — отрезки BL, BM, ND, DK. Поэтому равны стороны AB, BC, CD, DA.

I.2. а) Обозначим каждый из отрезков буквы П на нижнем основании исходного квадрата как x. Тогда стороны вырезаемого прямоугольника равны $2 - x$ и $2 - 2x$, а его площадь равна $(2 - x)(2 - 2x)$. Тогда площадь буквы П равна $4 - (2 - x)(2 - x) = -2x^2 + 6x$.

Уравнение $-2x^2 + 6x = 1$ должно иметь решение, удовлетворяющее условию $0 < x < 1$. Такое решение у него есть. Это решение $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{7})$.

б) Обозначим каждый из отрезков буквы М на нижнем и верхнем основаниях исходного квадрата как x. Тогда площадь выреза снизу равна сумме площадей двух прямоугольных трапеций. Большее основание такой трапеции равно $2 - x$, меньшее основание равно 1, а высота равна $1 - x$. Поэтому площадь такой трапеции равна $(3 - x)\cdot(1 - x) : 2$, а удвоенная площадь равна $(3 - x)(1 - x)$. Треугольник, вырезаемый сверху, имеет основанием $2 - 2x$, а высотой $1 - x$, поэтому его площадь равна $(1 - x)^2$. Поэтому площадь буквы равна $4 - (3 - x)(1 - x) - (1 - x)^2$. Приравняв её 1, снова получим уравнение $-2x^2 + 6x = 1$, одно из решений которого удовлетворяет условию $0 < x < 1$.

в) Обозначим каждый из отрезков буквы К на нижнем основании исходного квадрата как x. Площадь буквы равна сумме площадей прямоугольника и двух трапеций.

Площадь прямоугольника равна $2x$. Основания трапеции, примыкающей к верхней стороне квадрата равны $(2 - 2x)\sqrt{2}$ и $(2 - x)\sqrt{2}$, её высота равна $x : \sqrt{2}$, а потому её площадь (после упрощения) равна $\frac{1}{2}x(4 - 3x)$. Основания трапеции, примыкающей к нижней стороне квадрата равны $(2 - x) : \sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, её высота равна $x : \sqrt{2}$, а потому её площадь (после упрощения) равна $\frac{1}{4}x(4 - x)$. Приравняв сумму трёх площадей 1 и решив полученное квадратное уравнение $7x^2 - 20x + 4 = 0$, получаем один корень этого уравнения, удовлетворяющий ограничению $x < 1$: $x = \frac{10-6\sqrt{2}}{7}$.

I.3. а) Так как известны две диагонали и высота, то известны их половины. Поэтому задача свелась к построению треугольника по двум сторонам и высоте, проведённой на третью сторону. В свою очередь, эта задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету. Построив два таких прямоугольных треугольника с общим известным катетом (по разные стороны от него), мы получаем одну из сторон параллелограмма как сумму двух катетов построенных прямоугольных треугольников.

б) Допустим, требуется построить параллелограмм $ABCD$ по заданным элементам: 1) по острому углу A; 2) по диагонали AC и 3) по высоте CH на прямую AD. Прямоугольные треугольники ACH и CDH можно построить: ACH по гипотенузе и катету, а CDH по острому углу и катету. Тем самым, строится треугольник ACD, который достраивается до параллелограмма $ABCD$.

I.4. а) Трапецию $ABCD$ по основаниям AD и BC ($AD > BC$), диагонали AC и высоте CH можно построить так. Сначала строим треугольник ACD по двум сторонам AC и AD и высоте CH. Затем через точку C проводим прямую c и откладываем на ней отрезок CB в ту полуплоскость от прямой CD, где лежит точка A. Трапеция $ABCD$ построена.

б) Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$). Продлим сторону AD за точку D на отрезок $DF = BC$, проведём отрезок CF. Так как $BCFD$ — параллелограмм, то получился треугольник ACF, в котором две стороны — данные диагонали, а третья равна сумме оснований, то есть задача свелась к построению треугольника по трём сторонам.

I.5. Пусть заданы угол ab с вершиной O и точка M внутри этого угла. Продлим отрезок OM за точку M на равный ему отрезок MP. Проведём через точку P прямые, параллельные сторонам угла и обозначим через A и B точки их пересечения со сторонами угла. Мы построили параллелограмм $OAPB$ с диагональю OP. Точка M — середина этой диагонали. Вторая диагональ AB этого параллелограмма проходит через точку M и делится ею пополам. Она и является искомым отрезком.

I.6. Ответы: а) $1 - x$, б) $2(x - x^2)$, в) $0{,}5 + x - x^2$.

I.7. Ответы: а) $x\ \sqrt{1-x^2}$, б) $2\sqrt{x^2-1}$, в) $x^3\sqrt{1-x^2}$.

в) Боковая сторона такой трапеции равна $\sqrt{1-x^2}$, высота равна $x\sqrt{1-x^2}$, меньшее основание равно $2x^2 - 1$, полусумма оснований равна x^2, площадь равна $x^3\sqrt{1-x^2}$.

I.8. Ответы: а) 84, б) $a^2(\sqrt{3} + 1)$.

I.9. Ответ. В 7 раз.

I.10. Ответы. а) 0,5; б) 0,25.

а) Обозначим стороны прямоугольника a и b. Тогда его площадь равна ab. Согласно условию $a^2 + b^2 = 1$. Поэтому вместо площади удобнее рассматривать её квадрат a^2b^2. Так как сумма этих положительных сомножителей постоянна (равна 1), то наибольшее значения их произведения достигается тогда, когда эти сомножители равны, т. е. $a^2 = b^2$, откуда $a = b$. Это означает, что наибольшую площадь из всех прямоугольников с заданной диагональю будет иметь квадрат.

б) Согласно условию периметры прямоугольника и квадрата равны 2, тогда сторона квадрата равна 0,5 и его площадь равна 0,25. Полупериметр прямоугольника равен 1. Если одну его сторону обозначим как x, то его смежная сторона равна $1 - x$, а площадь равна $x\ (1 - x)$. Так как сумма этих сомножителей постоянна, то их произведение достигает наибольшего значения, когда они равны, т. е. при $x = 0,5$. Из этого следует, что наибольшую площадь имеет квадрат.

I.11. а) Площадь каждого «частичного» треугольника равна $\frac{1}{16}$, их сумма равна $\frac{1}{8}$, а площадь исходного треугольника равна $\frac{1}{4}$. Поэтому площадь полученного квадрата равна $\frac{3}{8}$.

б) Обозначим как x гипотенузу меньшего из полученных прямоугольных треугольников. Тогда гипотенуза большего из них равна $1 - x$. Тогда площадь меньшего треугольника равна $0,25x^2$, а площадь большего равна $0,25(1 - x)^2$. Поэтому площадь квадрата равна $0,25 - 0,25x^2 - 0,25(1 - x)^2 = 0,5x(1 - x)$. Поскольку наименьшее значение произведения $x(1 - x)$ равно 0,25, то наибольшее значение площади квадрата равно $\frac{1}{8}$.

I.12. а) Разность площадей поверхностей полученных тетраэдров равна удвоенной разности площадей двух треугольников на боковой грани, образованных после проведения сечения данного тетраэдра.

Когда точка K находится в середине ребра BD, площади этих треугольников равны, а потому равны и площади поверхностей частичных тетраэдров.

б) Если двигать точку K по ребру BD от B к D, то площадь треугольника KCB растёт, в то время как площадь треугольника KCD убывает, а потому данная дробь, выражающая отношение площадей, убывает.

в) Площадь равнобедренного треугольника ACK изменяется постольку, поскольку изменяется его высота KL, проведённая из точки K на AC. По мере продвижения точки K от B к D высота KLсначала убывает до тех пор, пока точка K не оказывается в середине ребра BD, а затем начинает возрастать.

г) Может, когда $KL = 0{,}5BL$. Если принять ребро исходного правильного тетраэдра за a, то $BL = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $KL = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда указанное равенство не выполняется.

I.13. а) Пусть KM — новое положение отрезка AB. Тогда, согласно четвертому признаку параллелограмма, четырёхугольник $AKMB$ — параллелограмм. Точки A и B пройдут отрезки AK и BM, которые равны как противоположные стороны параллелограмма.

б) Пусть треугольник ABC перешел в треугольник $A^*B^*C^*$. Прямые AA^*, BB^*, CC^*, по которым движутся вершины треугольника ABC, параллельны. Одна из этих прямых лежит между двумя другими. Допустим, что прямая CC^* лежит между прямыми AA^* и BB^*. Отрезки AA^*, BB^*, CC^* равны и параллельны. Стороны треугольника ABC «заметают» три параллелограмма AA^*B^*B, BB^*C^*C и AA^*C^*C. Высота параллелограмма AA^*B^*B на сторону AA^* равна сумме высот параллелограммов AA^*C^*C и CC^*B^*B , проведенных в стороне CC^*. Поэтому сумма площадей этих параллелограммов равна площади параллелограмма AA^*B^*B.

в) Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Пусть в результате движения, направление которого перпендикулярно AB, он переходит в треугольник DFG (соответственно DF — гипотенуза), причём $AD = AB$. Пусть, при этом, треугольник DFG расположен в той же полуплоскости от прямой AB, что и точка C (рис. 3).

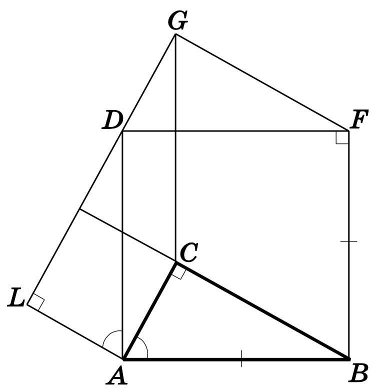


Рис. 3

При таком движении треугольника *ABC* образовалось два параллелограмма: *ADGC* и *BFGC*. Согласно пункту б) площадь квадрата *ADFB*, заметаемого гипотенузой *AB*, равна сумме площадей получившихся параллелограммов. (Это легко показать и не ссылаясь на пункт б). В самом деле, вся полученная при этом движении фигура — пятиугольник *ADGFB* — составлена из квадрата *ADFB* и треугольника *DGF*, равного треугольнику *ABC*, но также из двух параллелограммов *ADGC*, *BFGC* и треугольника *ABC*. Выразим теперь площадь каждого из полученных параллелограммов.

Имеем: площадь параллелограмма *ADGC* равна *DGAL*, где *AL* — высота параллелограмма, проведённая из точки *A* на *DG*. Так как треугольники *ALD* и *ACB* равны (по гипотенузе и острому углу), то $AL = AC$, откуда и следует, что площадь этого параллелограмма равна площади квадрата, построенного на стороне *AC*. Аналогично, площадь параллелограмма *BFGC* равна площади квадрата, построенного на стороне *BC*. Отсюда и получаем теорему Пифагора.

I.14. Пусть *ABCDFG* — данный шестиугольник, в котором равны и параллельны стороны *AB* и *DF*, *BC* и *FG*, *CD* и *AG*. Рассмотрим параллелограмм *ABDF*. В нём *AD* пересекает *BF* в середине *BF*. Рассмотрим теперь параллелограмм *ACDG*. В нём *CG* пересекает *BF* также в середине *BF*. Отсюда и вытекает то, что требуется. Аналогично доказывается обобщение.

I.15. Нет. Для этого достаточно рассмотреть четырёхугольник, симметричный относительно его диагонали (см. рис. 2).

I.16. Задачу решим без равенства трёх сторон. Проведём отрезки *AB*, *BC*, *CD*, *AD* и задачу решим при условии $AB = CD$, $AB \neq BC$ и в предположении, что центр *O* лежит внутри многоугольника *ABCD*. Проведём радиусы *OA*, *OB*, *OC*, *OD*. На рисунке 4, *а* можно увидеть следующие равенства углов: равны углы *OAD* и *ODA* (их обозначим

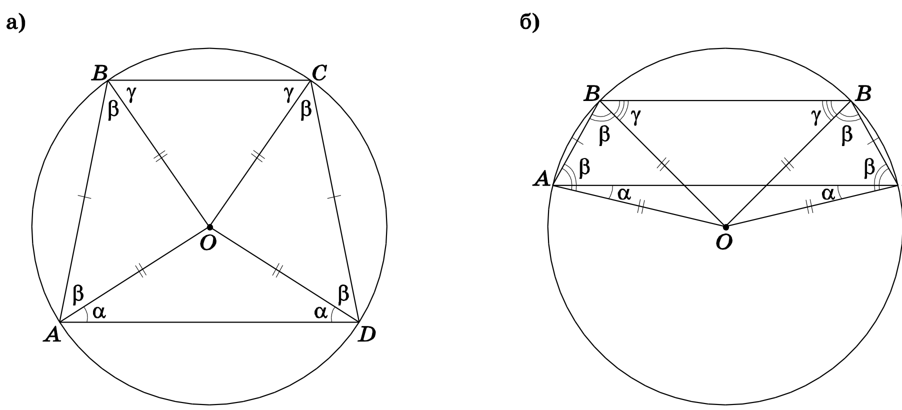


Рис. 4

через α), равны углы *OAB, OBA*, *OCD* и *ODC* (их обозначим через β), равны углы *OBC* и *OCB* (их обозначим через γ). Так как сумма углов четырёхугольника *ABCD* равна 360°, то $2\alpha + 4\beta + 2\gamma = 360^{\circ}$. Отсюда получаем, что сумма внутренних односторонних углов при прямых *AD* и *BC* и секущей *AB* $\alpha + 2\beta + \gamma = 180°$. Но тогда прямые *AD* и *BC* параллельны. При условии $AD \neq BC$ получаем трапецию.

Укажите, как изменится решение, если центр *O* лежит вне четырёхугольника *ABCD* рис. 4,*б*.

I.17. а) Вершины ромба лежат в серединах сторон прямоугольника. б) Вершины данного ромба. в) Вершина прямого угла, середины катетов и гипотенузы. г) Вершина прямого угла, а противоположная ей вершина — точка пересечения гипотенузы и биссектрисы прямого угла; две другие вершины — проекции этой точки на катеты. д) Одна вершина ромба лежит в вершине *A* треугольника, противоположная ей вершина ромба *M* лежит на пересечении биссектрисы из этой вершины и противоположной ей стороны *BC*, ещё две вершины лежат на сторонах *AB* и *BC* треугольника: надо через середину отрезка *AM* провести перпендикулярную ему прямую и найди точки пересечения этой прямой со сторонами *AB* и *AC*. е) Если в параллелограмме *ABCD* сторона *AB* больше стороны *BC*, то отложим на *AB* отрезок $AK = BC$ и на стороне *DC* отрезок $DM = BC$ и проведём отрезок *KM*. Четырёхугольник *AKMD* — ромб.

I.18. а) Равны углы *BKA* и *BAK*, так как накрест лежащие углы *BKA* и *KAD* равны. б) Три: *ABK*, *KCL*, *ACD*. в) Искомый периметр равен сумме двух данных периметров. д) Это следует из равенства треугольников *ABK* и *KCL*. е) Пусть $AB = a$ и $BC = b$. Если точки *K* и *M* не совпадают, то возможны два случая: 1) *M* не лежит на *BK*; тогда $MK = b - 2a$; 2) *M* лежит на *BK*; тогда $MK = 2a - b$. Объединить их можно формулой: $MK = |2a - b|$. ж) Треугольник *AKD* является прямоугольным.

I.19. $(P : 2)^2 = d^2 + 2S$, где *P* — периметр, *d* — диагональ, *S* — площадь. а) Нет. б) Если *a* и *b* — стороны прямоугольника, то из равенства $ab = 1$ следует, что $a^2 + b^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 \geq 2$ и равенство $a^2 + b^2 = 1$ выполняться не может. в) Нет.

I.20. Для этого достаточно решить систему $ab = 150$, $a + b = 25$, где *a* и *b* — длины сторон прямоугольника. Её решения 10 см и 15 см.

I.21. Согласно теореме Августа Адлера, любая задача, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена двусторонней линейкой фиксированной ширины. При этом окружность считается построенной, если построен её центр и одна из её точек. Решения предложенных здесь задач опираются на свойства ромба.

а) Достаточно приложить линейку к обеим сторонам данного угла и, проведя отрезки по другой стороне линейки, отметить точку их пересечения. Она лежит на биссектрисе угла, так как удалена от каждой стороны угла на одно и то же расстояние — ширину линейки (рис. 5, *а*).

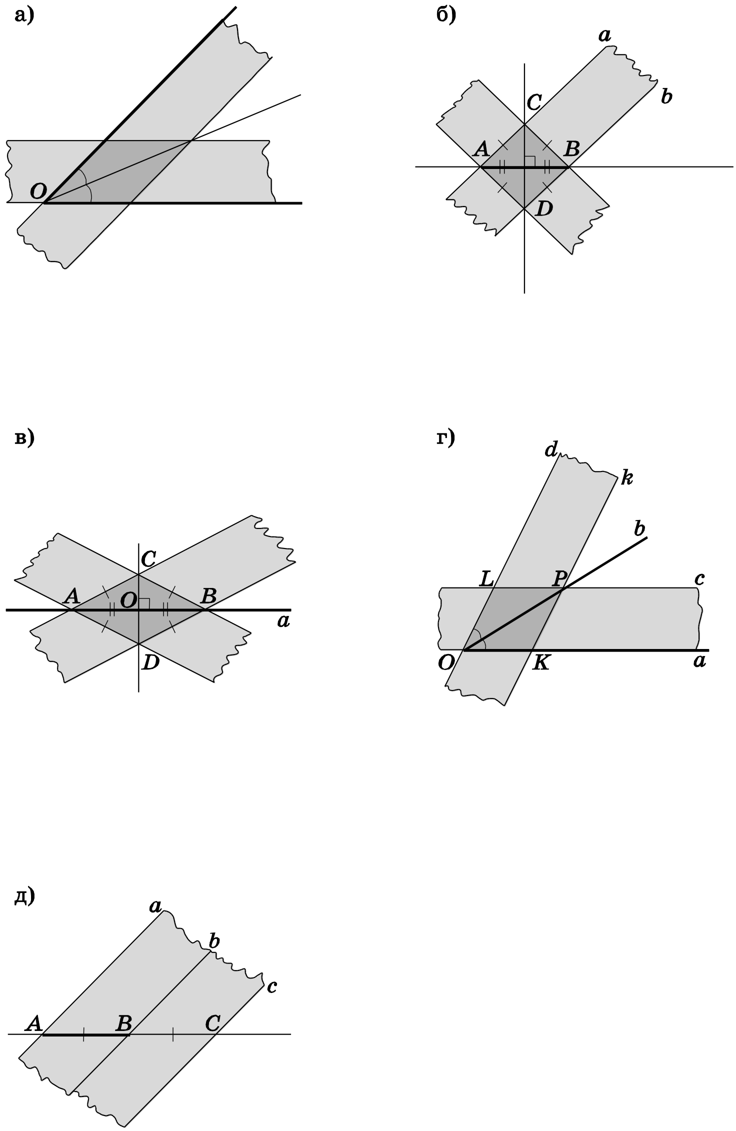


Рис. 5

б) Пусть дан угол O со сторонами a и b. Приложим линейку одним краем к стороне a и проведём прямую c по другому её краю так, чтобы она пересекала луч b. Обозначим полученную точку их пересечения P (рис. 5, *г*). Затем приложим линейку одним краем $к$ так, чтобы край $к$ прошёл через точку P, а другой её край d прошёл через точку O. Точку пересечения a и $к$ назовём точкой K, а точку пересечения d и c назовём точкой L. Четырёхугольник $OLPK$ — ромб, так как он является параллелограммом с высотами, равными ширине линейки. Так как его диагональ OP является биссектрисой угла O, то угол LOK в два раза больше данного угла ab.

в) Решим задачу, полагая, что данный отрезок AB длиннее ширины линейки. Тогда можно приложить линейку так, чтобы одним краем она проходила через точку A, а другим краем через точку B. Проведя прямые вдоль краев линейки, получим одну пару параллельных прямых a и b (прямая a идёт через точку A, рис. 5, *д*). Затем ещё раз приложим линейку вдоль прямой b в полуплоскости, где не лежит прямая a. и вдоль линейки проведём ещё прямую c, параллельную прямым a и b (рис. 5, *в*). Прямая AB пересечёт прямую c в некоторой точке C. Отрезок AC в два раза больше отрезка AB.

В случае, когда отрезок AB не длиннее ширины линейки, построение сложнее и опирается на свойства трапеции, сформулированные в конце главы II в задаче II.8.

г) Решим задачу, снова полагая, что данный отрезок AB длиннее ширины линейки. Тогда можно приложить линейку так, чтобы одним краем она проходила через точку A, а другим краем через точку B. Проведя прямые вдоль краев линейки, получим одну пару параллельных прямых a и b (прямая a идёт через точку A, рис. 5, *б*). Затем ещё раз приложим линейку так, чтобы одним краем она проходила через точку A, а другим краем через точку B, но уже симметрично относительно прямой AB. Получим другую пару параллельных прямых. Эти пары параллельных прямых дадут две точки пересечения C и D. Отрезок CD разделит данный отрезок AB пополам. Это следует из того, что он является диагональю в ромбе $ACBD$, другой диагональю которого является данный отрезок AB. Более того, прямая CD, перпендикулярна прямой AB.

К случаю, когда отрезок AB не длиннее ширины линейки, стоит вернуться в конце курса.

д) Пусть на прямой a задана некоторая точка O (рис. 5, *в*). На прямой a выберем произвольную точку A так, чтобы отрезок OA был длиннее ширины линейки, и построим такую точку B на прямой a, что точка O является серединой отрезка AB (построение указано в предыдущем пункте). Построим ромб $ACBD$ (снова смотри предыдущий пункт). Его диагональ CD перпендикулярна прямой a и проходит через точку O.

К задачам на построение двусторонней линейкой (например, к задаче о проведении через заданную точку прямой, параллельной данной прямой) стоит вернуться в конце курса, решив предварительно задачу II.8 о свойствах трапеции.

Глава II. Геометрия треугольника

§ 6. Синус. Применения синуса

6.1. а) $x : 4 = 2 : 3$. б) $x : 3 = 2 : 4$. в) $\sqrt{5} : 3 = 1 : (x + 3)$. г) $1 : 2 = 1{,}5 : x$. д) $1 : x = (1{,}5) : 3$.

6.3. а) 0,1; б) 1; в) 2; г) 0,000001.

6.4. а) $y = \frac{4}{3}x$; б) $y = \frac{2}{3}x$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = 2x - \sqrt{x^2 - 1}$; д) $y = 0{,}5\sqrt{x^2 + 1}$, е) $y = (x + 1) : x$.

6.5. Для определения длины эскалаторной ленты можно найти расстояние между двумя осветительными лампами, стоящими вдоль неё, а затем сосчитать число просветов между ними. Крутизну эскалатора можно найти, измерив угол между осветительной лампой и плоскостью, на которой она укреплена. Отсюда находим глубину станции метро.

6.6. Сначала найдём синус угла наклона эстакады. Он равен $48 : 120 = 0{,}4$. Затем найдём длину участка эстакады — 20 м. Затем найдём высоту самой маленькой опоры: она равна $20 \cdot 0{,}4 = 8$ м. Затем будем умножать эту длину последовательно на 2, 3, 4, 5, 6.

6.7. 1) Углы CAB и DCB равны. Поэтому равны их синусы. Запишем синусы этих углов: $\sin \angle CAB = a : c$, $\sin \angle DCB = a_1 : a$. Поэтому $a : c = a_1 : a$ и $a^2 = ca_1$. 2) Получается аналогично.

6.8. Нет: синус острого угла равен синуса смежного ему тупого угла, но эти углы не равны.

6.13. а) Проведём высоту трапеции из вершины меньшего основания. Получим прямоугольный треугольник, в котором катет равен половине гипотенузы, т. е. 1. Отсюда следует, что высота трапеции равна $\sqrt{3}$, а потому синус острого угла трапеции равен $\sqrt{3} : 2$. Синус угла при большем основании трапеции такой же.

б) Проведём высоту трапеции из вершины меньшего основания. Получим прямоугольный треугольник, в котором катет равен $(b - a) : 2$. Затем из этого прямоугольного треугольника выразим высоту трапеции и синус острого угла при большем основании трапеции. Синус другого угла трапеции такой же.

6.14. Диагональ грани куба равна $a\sqrt{2}$, а диагональ самого куба равна $a\sqrt{3}$, где a — ребро куба. Поэтому синус равен $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.Этот результат верен для любой диагонали куба, так как они все равны. Рёбра куба рассматриваются те, которые имеют с диагональю куба общую вершину.

6.15. Эта задача — обобщение предыдущей. Синус одного из углов равен $\sqrt{a^2 + b^2} : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Для двух других результат аналогичный.

6.16. Следует из того, что в сумме эти углы составляют 180°, а потому могут рассматриваться как смежные углы.

6.17. Для тупых углов следует рассмотреть смежный с ним острый угол.

6.18. Нет. Когда наибольший угол будет близок к 180°, его синус будет достаточно маленьким. Поэтому оставшиеся углы треугольника будут иметь больший синус.

6.19. Берём любой отрезок a и строим прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету, которые соответственно равны: а) $5a$ и $2a$; б) $3a$ и a; в) $5a$ и $3a$. Угол, лежащий против данного катета и имеет данный синус. Величины построенных углов ищутся приближённо по таблице. Они таковы: а) ≈ 24°; б) ≈ 19°; в) ≈ 37°. Стоит эти углы измерить и транспортиром и сравнить полученные результаты.

6.20. Сначала строятся острые углы, имеющие заданные синусы (см. предыдущую задачу). Смежные с ними тупые углы имеют такие же синусы. Эти углы, приближенно, таковы: а) ≈ 168°; б) ≈ 138°; в) ≈ 127°. Стоит эти углы измерить и транспортиром и сравнить полученные результаты.

6.21. Используется монотонность синуса: возрастание на промежутке [0°, 90°] и убывание на промежутке [90°, 180°]. б) Так как прямой угол входит в рассматриваемый промежуток, то верхняя граница равна 1. в) Так как прямой угол не входит в заданный промежуток, то достаточно перейти к смежным углам.

6.22. Если синусы углов равны, то сами углы либо равны, либо составляют в сумме 180°. В треугольнике второй случай исключён. Следовательно, эти углы равны, а потому треугольник — равнобедренный.

6.23. Рассмотрим прямоугольный треугольник, который получается, если на рисунке есть наклонная и перпендикуляр из точки A на прямую p. Так как длина перпендикуляра постоянна, то синус (острого) угла, который наклонная образует с прямой, уменьшается по мере увеличения наклонной. Уменьшение синуса такого угла означает уменьшение самого угла. б) Если уменьшается указанный угол, то увеличивается наклонная.

6.24. а) Пусть точка B прямой p — другой конец наклонной из точки A, а точка C — проекция точки A. Тогда $\sin B = \frac{AC}{AB}$. И так как у этой дроби числитель — постоянный, то дробь — синус угла наклона — уменьшается при росте знаменателя — длине наклонной. Поэтому и острый угол уменьшается. Этот результат также получить, рассматривая два прямоугольных треугольника с общим катетом AC и применяя теорему о внешнем угле треугольника.

6.25. Крутизну лестницы можно находить, используя синус угла подъёма лестницы — чем больше синус, тем круче лестница. Первая лестница на расстоянии ширины 20 ступенек по горизонтали поднимает на высоту 3 м. Поэтому $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+400a^2}}$, где a — ширина ступеньки в метрах. Вторая лестница на расстоянии ширины $15a$ по горизонтали поднимает на высоту 2 м. Поэтому $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{4+225a^2}}$. Сравнение этих выражений (удобно возвести в квадрат обратный им величины) показывает, что первый синус больше, значит, первая лестница круче.

6.26. Так как длина склона, т. е. длина пути на спуске, не фиксирована, то данное утверждение, вообще говоря, неверно. Если речь идёт о спуске на лыжах, то любителям большей скорости следует спускаться по более короткому спуску. Это понятно всем, другое дело — обоснование этому, которое зависит не только от геометрии.

6.28. Синус острого угла A прямоугольного треугольника ABC равен отношению катета a к гипотенузе c. Полагаем, что в тех пунктах, где задан катет — это катет a. а) Гипотенузу c находим по теореме Пифагора. б) Пусть дано отношение катетов $a : b = t$. Тогда $a = bt$, гипотенуза c равна $b\sqrt{t^2+1}$ и $\sin A = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. в) Даны катет a и медиана m к катету b. Тогда $\dfrac{b}{2}$ находим по теореме Пифагора как катет треугольника с гипотенузой m и катетом a. Затем находим b и $\sin A$. г) Даны катет a и медиана m к этому катету. Находим b и $\sin A$ также, как в пункте в). д) Медиана на гипотенузу равна половине гипотенузы, а потому известны катет и гипотенуза. е) Даны площадь $S = 0{,}5ab$ и сумма $a + b = p$. Решаем систему уравнений, где известно произведение двух чисел и их сумма. ж) Требуется решить систему уравнений вида: известно произведение двух чисел и сумма их квадратов.

6.29. а) Из условия следует, что известны половина основания и половина угла при вершине треугольника. Но тогда, используя синус, можно найти боковую сторону данного треугольника, а затем его высоту. б) Из условия следует, что известна половина угла при вершине треугольника. Но тогда, используя синус, можно найти половину основания данного треугольника, а затем его высоту. в) Из условия следует, что известна половина угла при вершине треугольника. Но тогда, используя синус, можно найти угол при основании данного треугольника, а затем его боковую сторону, затем половину стороны основания, затем площадь. г) Можно найти боковую сторону, затем, используя синус, половину стороны основания, затем площадь.

6.30. а) Из условия, используя синус, можно найти стороны данного прямоугольника, а затем его площадь. б) Из условия следует, что известны боковые стороны равнобедренных треугольников, на которые диагонали разбивают прямоугольник, и смежные углы при вершинах этих треугольников. Задача сведена к задаче 6.29 б). в) В этом случае известны основание и угол при вершине одного из равнобедренных треугольников, на которые диагонали разбивают прямоугольник. Такая задача рассмотрена в 6.29 а). Площадь прямоугольника в четыре раза больше площади этого треугольника.

6.31. Задача сводится к планиметрической. Эти углы находятся из равнобедренных треугольников: в первом случае его сторонами являются боковые рёбра и ребро основания пирамиды, во втором случае — боковые рёбра и диагональ основания.

6.36. Проведём высоты этой трапеции из вершин меньшего основания. Проекция боковой стороны трапеции на большее основание равна $(18 - 6) : 2 = 6$. Из прямоугольного треугольника, примыкающего к боковой стороне, найдём угол между боковой стороной и высотой — его синус равен $\dfrac{3}{4}$. Больший угол трапеции найдём, если прибавим к найденному углу $90°$.

6.37. Половина данной хорды видна из центра под углом $\frac{\alpha}{2}$. Она равна $\frac{R\sin\alpha}{2}$.

А расстояние от центра круга до хорды равно $R\sin(90° - \frac{\alpha}{2})$.

6.38. Примем гипотенузу этого треугольника за 1. Тогда каждый синус острого угла равен катету этого треугольника. Далее — теорема Пифагора.

6.39. Примем гипотенузу этого треугольника за 1. Тогда каждый синус острого угла равен катету этого треугольника. Их сумма больше гипотенузы, т. е. больше 1. А так как каждый катет меньше гипотенузы, т. е. 1, то их сумма меньше 2.

6.40. Достаточно сослаться на монотонность синуса острого угла: синус угла против увеличивающегося катета растет, а синус угла против постоянного катета уменьшается, так как сам этот угол уменьшается.

6.41. Достаточно проверить выполнимость утверждения из задачи 6.38: а) и в) таких треугольников нет; б) такой треугольник можно построить.

6. 42. Будем считать дорогу прямолинейной. Тогда высота подъёма туриста равна $12\sin 2°$ (км).

6.43. Вертикальная проекция лестницы равна $2\sin 70°$. Учитывая высоту платформы, получим, что лестница может добраться до точки на стене, высота которой равна $2\sin 70° + 2$. Номер этажа получим, разделив этот результат на 3 и взяв целую часть полученного числа.

6.44. Пусть мы хотим определить ширину реки напротив триангуляционного пункта. Считаем, что в этом месте берега реки прямолинейны. Пусть AB — триангуляционный пункт (B — его вершина), прямая AC перпендикулярна берегу реки, причем C — ближайшая точки реки, а D — точка, в которой прямая AC пересекает другой берег реки. Сначала из вершины B измеряем угол ABC, а потом из треугольника ABC находим последовательно угол C, затем BC, затем AC (только с помощью синуса). Затем из вершины B измеряем угол ABD, а потом из треугольника ABD находим последовательно угол D, затем BD, затем AD (только с помощью синуса). Отрезок $CD = AD - AC$. А это и есть ширина реки.

Зная косинус, а ещё лучше — тангенс, задачу можно решить быстрее. Видимо, имеет смысл к ней вернуться.

6.45. Площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника, образованного двумя его сторонами и диагональю.

6.46. Запишем формулу площади для каждого из полученных треугольников, воспользуемся равенством синусов смежных углов и, сложив полученные четыре выражения, получим нужную формулу.

6.50. Четверть площади прямоугольника заключена в треугольнике, ограниченном половинами его диагоналей и стороной. Она равна $\frac{d^2\sin\varphi}{8}$. Поэтому площадь прямоугольника равна $\frac{d^2\sin\varphi}{2}$.

6.52. Согласно полученной формулы площади, она при заданных длинах двух сторон будет наибольшей, когда синус угла между ними равен 1. При указанном изменении угла его синус достигает наименьшего значения на границах этого промежутка. Так как синусы этих граничных углов равны, то наименьшее значение синуса равно 0,5. Следовательно, площадь треугольника изменяется от четверти до половины произведения двух сторон треугольника.

6.53. Рассмотрим треугольник KOM, образованный двумя радиусами данного круга OK, OM и хордой KM по мере удаления хорды KM от центра круга. Согласно формуле площади треугольника, полученной в этом пункте, его площадь зависит только от синуса угла между этими радиусами. А угол этот изменяется от 0° до 180°. Следовательно, наибольшая площадь треугольника достигается при угле 90°, а наименьшей площади нет, поэтому границы для площади таковы: от 0 до $0{,}5R^2$, где R — радиус круга.

6.54. Обозначим биссектрису AD как l, угол, который она образует со сторонами AB и AC как α, площади треугольников ADB и ADC как S_1 и S_2 соответственно. Тогда имеем: $S_1 = 0{,}5cl\sin\alpha$ и $S_2 = 0{,}5bl\sin\alpha$: Отсюда: получаем: $S_1 : S_2 = c : b$.

6.55. Продолжим обозначения предыдущей задачи. Имеем:

$S_2 = 0{,}5lCD\sin\angle CDA$, $S_1 = 0{,}5lBD\sin\angle BDA$. И так как синусы этих смежных углов равны, получаем, что $S_1 : S_2 = BD : CD$. Сопоставляя этот результат с результатом, полученным в предыдущей задаче, получаем нужное соотношение: $AB : AC = BD : CD$.

6.56. г) Например, можно доказать, что из всех параллелограммов с заданными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольник.

6.57. б) Верна. Пусть в невыпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD лежит внутри четырёхугольника, а диагональ AC идет вне него. Диагональ AC пересекает прямую BD в некоторой точке M, лежащей вне отрезка BD. Будем считать, что точка B лежит между точками M и D. Угол AMB обозначим через φ. Заметим, что $\sin\varphi$ равен синусу угла CMB, смежного с углом AMB. Тогда

$$S(ABD) = S(AMD) - S(ABM) = \frac{1}{2}AM \cdot MD\sin\varphi - \frac{1}{2}AM \cdot MB\sin\varphi = \frac{1}{2}AM \cdot BD\sin\varphi.$$

Аналогично, получаем, что $S(CBD) = \frac{1}{2}CM \cdot BD\sin\varphi$. Складывая эти два равенства, получаем, что $S(ABCD) = S(ABD) + S(CBD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\varphi$.

Случай, когда D лежит между M и B рассматривается аналогично.

6.59. Если дан один из углов равнобедренного треугольника, то известны все его углы. Поэтому в пропорции, которая является теоремой синуса, известны три члена пропорции (формула 15 в п. 6.6 учебника), а потому можно найти и четвертый член пропорции.

6.60. Выбрать один из полученных треугольников и, используя теорему синусов, составить необходимую пропорцию.

6.61. Пусть в треугольнике ABC проведена биссектриса CL на заданную сторону AB. Сначала по теореме синусов найдём ещё какую-нибудь сторону данного треугольника, например, AC. Затем из треугольника ACL найдём по теореме синусов биссектрису CL.

6.62. Сначала найдём по теореме синусов рёбра тетраэдра, которые неизвестны. Затем найдём площади двух граней по формуле площади треугольника, использующей синус, а площади двух других граней — по формуле Герона.

6.65. Диагонали разбивают параллелограмм на четыре равновеликих треугольника, один из которых имеет сторону 12, углы, прилежащие к этой стороне, 30° и 45°, а противолежащий угол равен 105°. Отметим, что $\sin 105° = \sin 75°$. По теореме синусов, в этом треугольнике не заданная сторона x, лежащая против угла в 30°, является членом такой пропорции:

$12 : \sin 105° = x : \sin 30°$, а потому $x = 6 : \sin 75°$. Следовательно, площадь треугольника равна $36 \sin 45° : \sin 75°$, а площадь параллелограмма в 4 раза больше площади этого треугольника.

6.66. Сначала по теореме синусов находим стороны AC, CD треугольника ACD, в котором известна сторона AD и углы CAD и CDA. Затем по теореме синусов находим стороны AB, BC треугольника ABC, в котором известна сторона AC и углы BAC и BCA. Площадь трапеции можно найти, складывая площади треугольников ABC и CAD, найденные по формуле п. 6.5.

6.67. Из составленной по теореме синусов пропорции видим, что: а) в этом случае синус получается большим 1, и такого треугольника не существует; б) в этом случае синус равен 1 — получаем прямоугольный треугольник; в) в этом случае есть два угла — острый и тупой, синусы которых равны полученному числу.

6.68. Пусть в треугольнике ABC проведена биссектриса CL на сторону AB. Обозначим $BL = a_1$, $AL = b_1$, $\angle ACL = \angle BCL = \varphi$. Тогда по теореме синусов из треугольника ACL имеем $b : b_1 = \sin\angle ALC : \sin\varphi$ По теореме синусов из треугольника BCL имеем $a : a_1 = \sin\angle BLC : \sin \varphi$. Отсюда, так как $\sin\angle ALC = \sin\angle BLC$, получаем нужную пропорцию.

6.69. Пусть в треугольнике ABC для его сторон выполнено неравенство $c > b$. Запишем теорему синусов: $c : b = \sin C : \sin B$, откуда получаем неравенство $\sin C > \sin B$. Так как все углы треугольника острые, то из монотонности синуса следует, что $\angle C > \angle B$.

6.70. Обозначим стороны одного треугольника a_1, b_1, c_1, а другого a_2, b_2, c_2. Из того, что углы A_1 и B_1 соответственно равны углам A_2 и B_2 следует, что $\sin A_1 : \sin B_1 = \sin A_2 : \sin B_2$, откуда $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ или $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$.

6.71. а) Из равенства углов и теоремы синусов следует равенство сторон; б) из равенства сторон и теоремы синусов следует равенство синусов, а так как два угла треугольника в сумме не равны 180°, то следует и равенство углов; в) если острый угол A больше угла B, то из монотонности синуса острых углов следует, что $a > b$; если угол A тупой, то угол B тупым быть не может и он меньше угла, смежного с углом A; поэтому, снова $a > b$; г) если сторона $a > b$, то $\sin A > \sin B$ и $\angle A > \angle B$, так как в противном случае мы приходим к противоречию с утверждением в).

6.72. а) Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C проведены лучи CF и CG, которые угол C разделили на три равных угла, причём порядок точек на отрезке AB такой A, F, G, B. Из треугольника ACF имеем: $AF : CF =$

$= \sin 30° : \sin 45°$. Из треугольника FCG имеем $FG : CF = \sin 30° : \sin 75°$. Сравнивая эти выражения, видим, что $AF > FG$. Аналогично, $BG = AF > FG$.

б) Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C проведены лучи CF и CG, которые сторону AB разделили на три равных отрезка, причём порядок точек на отрезке AB такой A, F, G, B. Обозначим угол $ACF = \alpha$. Тогда угол $BCG = \alpha$, угол $BCG = 90° - 2\alpha$. Из треугольника ACF имеем: $\sin\alpha = (AF\sin 45°) : CF$. Из треугольника FCG имеем: $\sin(90° - 2\alpha) = (GF\sin(45° + \alpha)) : CF$. Так как $AF = GF$, осталось сравнить $\sin 45°$ и $\sin(45° + \alpha)$, что очевидно, так как углы $45°$ и $45° + \alpha$ — острые, а потому $\sin 45°$ меньше $\sin(45° + \alpha)$. Отсюда и следует, что средний отрезок FG виден из точки C под наибольшим углом.

6.73. Решение задачи почти дословно воспроизводит решение предыдущей задачи.

6.74. Сначала из треугольника ABC по теореме синусов находим сторону AC, затем из треугольника ACD находим сторону CD.

6.75. Угол C треугольника ABC равен $10°$. Пусть скорость автомобиля на просёлке равна v. Тогда на шоссе она равна $2v$. Время, которое затратит автомобилист на просёлке AC равно $AC : v$. Сторона $AB = AC(\sin 10° : \sin 150°)$, т. е. $AB = 2AC\sin 10°$. Аналогично, сторона $BC = 2AC\sin 20°$. На путь по шоссе AB и просёлку BC автомобилист время равное $AB : 2v + BC : v$. Подставим в эту сумму выражения для AB и BC. Получим

$AB : 2v + BC : v = 2AC\sin 10° : 2v + 2AC\sin 20° : v = AC : v(\sin 10° + 2\sin 20°)$.

Поскольку $\sin 10° + 2\sin 20° = 0{,}174 + 0{,}684 < 1$, то это время меньше времени $AC : v$, т. е. стоит выехать на шоссе и времени будет затрачено меньше, хотя пройденный путь станет длиннее.

6.76. Третий угол треугольника равен $80°$. Меньшая сторона треугольника лежит против угла $30°$. При постоянной скорости отношение времён равно отношению расстояний. Поэтому найдём по теореме синусов время, которое самолёт затрачивает на полёт по каждой стороне треугольника, а затем сложим все три времени. Получим, что самолет затратил на полёт $(1 + (\sin 70° + \sin 80°) : \sin 30°)$ часов.

§ 7 Косинус. Применения косинуса

7.2. В задачах б), д), е) достаточно построить вначале острый угол, смежный данному тупому. Косинус этого острого угла отличается от данного косинуса только знаком.

7.3. е) Сначала найдём высоту этого треугольника на большую сторону по формуле Герона. Затем из полученных прямоугольных треугольников найдём недостающие катеты этих треугольников, а затем и косинусы двух углов этого треугольника. Косинус третьего угла найдём аналогично.

7.4. Если диагональ равна стороне ромба, то треугольник, образованный двумя сторонами ромба и этой диагональю является равносторонним. Следовательно, острый угол ромба равен $60°$.

7.5. Найдём сначала высоту этой трапеции, проведя перпендикуляры из вершин меньшего основания на большее.

7.7. Пусть $ABCD$ — прямоугольник со сторонами $AB = a$ и $BC = b$. Если $\angle CAB = \alpha$ и $\angle ACB = \beta$, то

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \cos\beta,\ \sin\beta = \cos\alpha.$$

Сумма квадратов этих косинусов равна 1.

7.8. Пространственный аналог предыдущей задачи. Найдём квадрат диагонали этого параллелепипеда — он равен сумме квадратов его измерений. После чего находим квадрат каждого косинуса и сумму этих квадратов — она равна 1.

7.9. г) Если бы хотя бы синус или косинус были по модулю больше 1, то и сумма квадратов синуса и косинуса была больше 1.

7.14. Сравним сумму их квадратов с 1. Она должна быть равна 1. Ответы такие: а) нет; б) нет; в) да.

7.15. а) Сначала найдём стороны треугольника, прилежащие к данным углам как гипотенузы прямоугольных треугольников ABD и ACD. Эти треугольники могут лежать как с одной стороны от AD, так и по разные стороны от AD. Сторону BC найдём как сумму (или разность) проекций сторон AB и AC на прямую BC. Площадь равна $\frac{1}{2}BCAD$.

б) Если $AD = 2$, то $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{2}$,, $BD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $CD = 2$, $BC = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, площадь $S = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

7.16. а) Следует рассмотреть три разных вида данного равнобедренного треугольника ABC (в зависимости от величины угла A при вершине).

1) $\angle A = 90°$. Тогда проекцией катета AB на прямую BC является точка A, а проекцией гипотенузы BC является катет AC.

2) $\angle A$ — острый. Тогда треугольник ABC — остроугольный и высота BD лежит внутри треугольника ABC, а точка D лежит внутри AC. Если положить $AD = x$, то $DC = AC - x$ и находим x из уравнения $AB^2 - x^2 = BC^2 - (AC - x)^2$. Решая его, получим, что $x = (AB^2 + AC^2 - BC^2) : 2AC$.

В этом случае AD — проекция AB, а DC — проекция BC.

3) $\angle A$ — тупой, т. е. треугольник ABC — тупоугольный. Тогда точка D лежит на продолжении отрезка CA за точку A. Если $AD = x$, то $DC = AC + x$ и находим x из уравнения $AB^2 - x^2 = BC^2 - (AC + x)^2$. Получим, что $x = (BC^2 - AB^2 - AC^2) : 2AC$.

Значит, о виде треугольника ABC можно судить по знаку числа $AB^2 + AC^2 - BC^2$: если оно положительно, то треугольник ABC — остроугольный, если отрицательно — тупоугольный, если равно нулю — прямоугольный.

б) В обоих случаях треугольник ABC — тупоугольный. Если $AB = AC = 5$ и $BC = 8$, то $AD = (64 - 50) : 16 = \frac{7}{8}$ и $DC = 5\frac{7}{8}$. Если $AB = AC = 25$ и $BC = 48$, то $AD = (2304 - 1250) : 96 = 12\frac{1}{48}$ и $DC = 37\frac{1}{48}$.

7.19. План решения этой задачи описан в указании к задаче 7.15.

7.20. Надо воспользоваться результатами, полученными в задаче 3.38.

7.21. Использовать свойство внешнего угла треугольника.

7.22. Все углы этого многоугольника острые, а потому это треугольник

7.23. Прямоугольник.

7.24. Все углы этого многоугольника — тупые. Поэтому число его сторон не меньше пяти.

7.25. а) Они либо равны нулю, либо отличны от нуля и противоположны. б) Два из них могут быть нулями, а тогда два отличных от нуля противоположны друг другу; если же нулевых косинусов нет, то это две пары ненулевых противоположных чисел.

7.26. Все боковые грани этой призмы являются прямоугольниками, а потому это прямая призма.

7.27. Косинус убывает на промежутке $[0°, 180°]$. Поэтому косинусы углов надо расположить по возрастанию градусных мер этих углов: а) $\cos 28°$, $\cos 54°$, $\cos 71°$; б) $\cos 21°$, $\cos 54°$, $\cos 121°$; в) $\cos 46°$, $\cos 94°$, $\cos 153°$.

7.28. а) $\alpha = \beta$; б) $\alpha + \beta = 180°$. в) Так как синус угла неотрицателен, то и косинус в левой части также. Поэтому α из отрезка $[0°, 90°]$. Если $\alpha = 0°$, то $\cos 0° = 1$ и $\beta = 90°$. Если $\alpha = 90°$, то $\cos 90° = 0$ и $\beta = 0°$. Если угол α острый, то можно считать его углом A, прилежащим к катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, а тогда $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$. Но это отношение является синусом угла B. Поэтому $\alpha + \beta = 90°$.

7.29. Угол в вершине P убывает от 180° до 0°. Поэтому $\cos P$ возрастает и пробегает интервал $(-1,1)$. Углы при основании равнобедренного треугольника PAB возрастают от 0° до 90°. Поэтому их косинусы убывают от 1 до 0.

7.30. Задача аналогична предыдущей задаче. Углы граней при вершине P убывают от 90° до 0°. Поэтому косинусы этих углов возрастают от 0 до 1. Углы в гранях, прилежащие к основанию пирамиды, возрастают от 45° до 90°. Поэтому их косинусы убывают от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 0.

7.31. Задача аналогична задаче 7.30. Углы граней при вершине P убывают от 120° до 0°. Поэтому косинусы этих углов возрастают от $-\frac{1}{2}$ до 1. Углы в гранях, прилежащие к основанию пирамиды, возрастают от 30° до 90°. Поэтому их косинусы убывают от $\frac{\sqrt{3}}{2}$ до 0.

7. 32. Если эти углы острые или хотя бы один из них прямой, а другой острый, то это очевидно. Если же один из этих углов тупой, то смежный с ним — острый и так как он является внешним к данному треугольнику, то он, будучи острым, больше второго из рассматриваемых углов, а потому его косинус меньше косинуса второго рассматриваемого угла.

7.33. Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, а c — его гипотенуза, то $a + b > c$, а потому $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} > 1$.

7.34. Угол CXB может быть всех трёх видов. При этом он увеличивается независимо от вида исходного треугольника, так как в каждом новом его положении он является внешним по отношению к прежнему его положению. Рост угла CXB происходит от угла CAB до угла α, смежному с углом CBA. Поэтому $\cos\angle CXB$ уменьшается от значения $\cos A$ до $\cos\alpha$. Если высота CH лежит внутри треугольника ABC, то синус угла CXB сначала растет от $\sin A$ до 1, а затем убывает от 1 до $\sin\alpha$. В том случае, когда CH лежит вне треугольника ABC угол CXB либо всё время острый и тогда его синус растет, либо всё время тупой, и тогда он убывает.

7.35. а) $\sin\alpha < \sin 45° = \cos 45° < \cos\alpha$; б) $\sin\alpha > \sin 45° = \cos 45° > \cos\alpha$; в) в этом интервале $\sin\alpha$ положителен, а $\cos\alpha$ отрицателен; поэтому $\cos\alpha<\sin\alpha$.

7.36. Запишем теорему косинусов для угла треугольника. Установим знак полученной дроби, то есть знак косинуса соответствующего угла. Так как знаменатель дроби всегда положителен, то знак дроби совпадает со знаком её числителя, т. е., например, для угла C, со знаком числа $a^2 + b^2 - c^2$. В соответствии с этим знаком получим вид угла C треугольника: если он положителен, то угол C — острый, если знак отрицателен, то угол C — тупой, если $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то угол C — прямой.

7.37. Запишем согласно теореме косинусов квадрат каждой диагонали параллелограмма. Сложим эти квадраты. Учтя равенство противоположных сторон параллелограмма и противоположность косинусов его прилежащих к одной стороне углов, получим требуемое соотношение.

Пусть дан треугольник ABC. Проведём в нём медиану AM. Продлим её за точку M на её длину. Соединим точку C_1 с точками A и B. Согласно признаку параллелограмма получаем параллелограмм $ACBC_1$. Как только что доказано, $AB^2 + CC_1{}^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Отсюда, обозначив стороны данного треугольника a, b, c, получаем формулу для длины медианы m_c треугольника, проведённой к стороне c (точнее — для квадрата её длины):

$$m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2.$$

7.39. По теореме косинусов найдём каждую из его диагоналей.

7.40. Используем теорему косинусов.

7.41. Дано: a, c, $\angle C$. Найти: b. Запишем теорему косинусов для известного угла: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Получается квадратное уравнение относительно неизвестной стороны b. Если оно имеет решение, то треугольник решить можно. Задача может иметь как два решения, так и одно.

7.45. Условие задачи можно переформулировать так: если в треугольнике ABC стороны a и b — постоянны, а угол C между ними возрастает, то третья сторона c тоже возрастает. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы косинусов и убывания косинуса угла C: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Из этого же равенства вытекает и справедливость обратного утверждения.

7.46. Используем формулу для квадрата медианы треугольника, полученную в задаче 7.37: $m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2$. Запишем согласно этой формуле квадраты длин двух медиан треугольника:

$$m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2 \text{ и } m_a^2 = \frac{1}{2}(c^2 + b^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

Составим разность квадратов этих медиан: $m_c^2 - m_a^2 = \frac{3}{4}(a^2 - c^2)$. Из этого же равенства вытекает справедливость обоих взаимно обратных утверждений.

7.47. Запишем по теореме косинуса квадрат каждой диагонали параллелограмма и составим разность этих квадратов. Учитывая, что противоположны косинусы углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, приходим к нужному соотношению. Но можно просто сослаться на результат задачи 7.45.

7.48. Пусть сторона данного треугольника равна 3, пусть точки деления K и L, так что $BK = KL = LC = 1$. Ясно, что углы BAK и CAL равны. Сравним углы $\alpha = \angle BAK$ и $\beta = \angle LAK$. Для начала найдём длину AK по теореме косинусов из треугольника $BAK : AK^2 = = \frac{7}{9}$. Затем по теореме косинусов найдём косинусы углов α и β. Получим: $\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ и $\cos\beta = \frac{13}{14}$. Сравним эти косинусы. Удобнее сравнить их квадраты. Получим $\frac{175}{196} > \frac{169}{196}$. Поэтому $\cos\alpha > \cos\beta$ и $\alpha < \beta$.

7.49. Для сторон нового треугольника будет выполняться неравенство треугольника, а потому существует треугольник с полученными длинами отрезков. Углы этого треугольника будут соответственно такими же, как и углы исходного треугольника в силу теоремы косинусов и пропорциональности их сторон.

7.50. Длину одной из частей проволоки обозначим как x, тогда другая равна $30 - x$. Запишем теорему косинусов для треугольника со сторонами x, $30 - x$, 16 и углом 60°: $256 = x^2 + (30 - x)^2 - x(30 - x)$. Это квадратное уравнение (решите его!) имеет два корня, сумма которых равна 30, т. е. длину проволоки. А в практике — это одно решение: $x \approx 18{,}2$ см.

7.51. Доказательство способом от противного. а) Пусть в треугольнике ABC точка K — середина стороны AB и отрезок KM с концом M на стороне AC параллелен стороне BC. Покажем, что точка M — середина стороны AC. Допустим противное — серединой стороны AC является точка P, отличная от M. Тогда по теореме о средней линии треугольника прямая KP параллельна стороне BC, т. е. через точку K проходят две прямые KM и KP, параллельные прямой BC, что невозможно. Поэтому точка M — середина стороны AC. б) Доказательство аналогично.

7.52. Можно использовать формулу площади треугольника через стороны и угол между ними. Таких треугольников четыре и площадь каждого из них составляет четверть площади исходного треугольника. Параллелограммов на рисунке три.

7.53. Стороны граней отсеченных тетраэдров в два раза меньше сторон граней исходного тетраэдра, а потому площади поверхностей отсеченных тетраэдров в четыре раза меньше площади поверхности исходного тетраэдра. Многогранник, который получится после удаления малых тетраэдров, имеет 8 граней: 4 средних треугольников на гранях исходного тетраэдра и четыре треугольника, по которым сделаны были «срезы». Такие многогранники называют *октаэдрами*. Для каждой оставшейся «серединки» на поверхности такого многогранника есть равный ей «срез». Вместе их площади дают половину площади соответствующей грани исходного тетраэдра. Поэтому площадь поверхности октаэдра равна половине площади поверхности тетраэдра.

7.54. У прямоугольного.

7.55. Воспользуемся утверждением о длине средней линии.

7.56. Высота равностороннего треугольника больше половины его стороны.

7.57. а) В прямоугольной трапеции. б), в) Средняя линия трапеции может быть больше любой боковой стороны трапеции, если представить себе достаточно узкую трапецию. Средняя линия трапеции всегда больше меньшего основания трапеции и меньше большего её основания. Средняя линия трапеции может быть равна боковой стороне трапеции.

7.58. Площадь каждой грани малой пирамиды составляет четверть площади соответствующей грани исходной пирамиды.

7.59. Достаточно записать формулу для вычисления средней линии трапеции.

7.60. а) Обозначим боковую сторону трапеции через a, а основания трапеции как b и c. Согласно условию, имеем равенство $2a + b + c = P$, где P — периметр трапеции. Из этого равенства, зная a, найдём $b + c$, что будет удвоенной средней линией трапецией. б) Обозначим части большего основания, прилегающие к бокам трапеции как a, а среднюю часть этого основания как b. Тогда меньшее основание трапеции равно b, а сумма оснований трапеции равна $2a + 2b$. Отсюда получаем длину средней линии $a + b$.

7.62. б) В получившемся прямоугольном треугольнике средняя линия трапеции является медианой, проведённой к гипотенузе, а потому равна половине боковой стороны трапеции.

7.63. Через вершину меньшего основания трапеции проведём прямую, параллельную диагонали трапеции. Продлим большее основание трапеции до пересечения с этой прямой. Получится прямоугольный треугольник. Он будет к тому же и равнобедренным, причём его гипотенуза равна сумме оснований трапеции. Тогда в этом равнобедренном прямоугольном треугольнике известна гипотенуза, а высота трапеции равна высоте этого треугольника, проведённой на гипотенузу, то есть половине гипотенузы.

7.64. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ сторона AB разделена на три равные части. Проведём хорду трапеции BF, параллельную стороне CD. Затем проведём прямые через каждую точку деления стороны AB, параллельные основаниям. Используя теорему синусов, докажем, что и хорда BF разделилась на три равные части. Но тогда и сторона BD проведёнными прямыми разделится на три равные части. Те части проведённых прямых, которые лежат в параллелограмме $BCDF$, равны стороне BC. Части проведённых прямых, которые находятся в треугольнике ABF, учитывая, что $AF = a – b$, можно найти по теореме синусов из соответствующих треугольников. Они будут равны $\frac{1}{3}(a - b)$ и $\frac{2}{3}(a - b)$. Складывая их с b, получаем: $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ и $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$.

7.65. Построим прямоугольник, у которого средняя линия является средней линией данной трапеции, а две его стороны лежат на тех же прямых, что и основания трапеции (рис. 6). А для средней линии прямоугольника это выполняется.

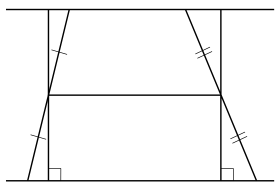


Рис. 6

7.66. Проведённой хордой из вершины A данный треугольник разбит на два частичных треугольника. В каждом из них средняя линия данного треугольника также является средней линией (следует из задачи 7.51) Следовательно, проведённая хорда разделилась пополам.

7.67. Сводится к предыдущей задаче.

7.68. Отрезок, соединяющий середины соседних сторон данного четырёхугольника, является средней линией треугольника, вершинами которого являются три вершины данного четырёхугольника. Поэтому он равен половине соответствующей диагонали данного четырёхугольника и параллелен ей. Этим же свойством обладает другой такой отрезок — тот, который соединяет середин двух других сторон данного четырёхугольника. Тем самым выполняется один из признаков параллелограмма.

В пространстве получается тот же результат, если воспользоваться транзитивностью параллельности в пространстве.

7.69. Обе средние линии трапеции являются диагоналями четырёхугольника, вершины которого лежат в серединах сторон трапеции. Согласно предыдущей задаче, этот четырёхугольник является параллелограммом. А диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам.

7.70. а) Нельзя, так как таких треугольников бесконечное множество. б) Можно. Заданные две средние линии, определяют и третью среднюю линию. После этого достаточно через каждую из трёх имеющихся точек — концов средних линий — провести прямые, параллельные соответствующим трём средним линиям.

7.71. Можно в каждом случае.

7.72. а) Это следует из результата задачи 7.51. б) Будем считать AD большим основанием. Если известна средняя линия треугольника ABC, то она равна половине другого основания BC. Если же известна средняя линия треугольника ACD, то BC найти нельзя.

§ 8 Тригонометрические функции

8.1. Следует из того, что положительное число увеличивается, если разделить его на положительное число, меньшее 1.

8.2. а) Да. б) Да. Оба утверждения следуют из монотонности тангенса острых и монотонности тангенса тупых углов.

8.6. Провести высоту этого треугольника и рассмотреть полученный прямоугольный треугольник, в котором известны острый угол (половина угла при вершине равнобедренного треугольника) и лежащий против него катет (половина основания равнобедренного треугольника).

8.7. Естественно считать, что точка D не совпадает с вершинами треугольника. а) Следует рассмотреть два случая: высота BD лежит в данном треугольнике или вне данного треугольника. В первом случае искомая сторона находится как сумма двух катетов полученных прямоугольных треугольников; во втором случае — как разность катетов. Каждый катет при этом находится из прямоугольного треугольника, полученного после проведения высоты. б) Если известны все углы данного треугольника, то задача сводится к предыдущей.

8.8. а) Тангенс угла между стороной a и диагональю прямоугольника равен отношению $b : a$, где b — другая сторона прямоугольника. б) угол между диагоналями прямоугольника равен удвоенному углу между диагональю и стороной прямоугольника, которая была решена в п. а).

8.9. а) $b = a\text{tg}\alpha$, где a — заданная сторона прямоугольника, а α — угол между a и диагональю. б) Угол между диагональю и стороной прямоугольника равен половине угла между диагоналями. Задача сводится к предыдущей.

8.10. Если известен угол ромба, то известна и его половина. Затем из прямоугольного треугольника, в котором катетами являются половины диагоналей ромба, используя половину известной диагонали и половину известного угла, с помощью тангенса находим половину неизвестной диагонали, а затем и всю неизвестную диагональ.

8.11. Угол, под которым видна сторона данного многоугольника из его центра, равен $360° : n$. Тогда половина этого угла равна $180° : n$. Далее достаточно рассмотреть прямоугольный треугольник, в котором известны катет (половина стороны данного многоугольника) и противолежащий ему найденный угол $180° : n$. Аналогично находится ответ на второй поставленный вопрос.

8.14. В этом тетраэдре каждая грань является прямоугольным треугольником. Чтобы в этом убедиться, надо найти длины всех его рёбер, что можно сделать по теореме Пифагора из соответствующих прямоугольных треугольников. Затем по теореме косинусов из треугольника PBC убеждаемся в том, что угол C — прямой. Сравнение острых углов граней этого тетраэдра вытекает из сравнения тангенсов этих углов. Наибольшим острым углом окажется угол APB, тангенс которого равен $\sqrt{13}$.

8.15. $h = \frac{a}{2}\text{tg}(90° - \frac{A}{2})$.

8.16. Достаточно записать тангенсы этих углов.

8.17. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой и проведена высота CD. Из прямоугольного треугольника ACD запишем равенство $CD = AD\text{tg}A$, из прямоугольного треугольника BCD запишем равенство $CD = BD : \text{tg}\angle BCD$. Перемножим полученные равенства и, учитывая, что $\angle BCD = \angle CAD$, придём к нужному результату.

8.18. Пусть точка B лежит в данной плоскости, AB — наклонная к этой плоскости, BC — проекция на данную плоскость наклонной AB. Угол, под которым из точки на плоскости виден перпендикуляр AB — это угол ACB. Тогда $\text{tg}\angle ACB = AB : BC$ и так как перпендикуляр AB один и тот же, то тангенс искомого угла (и сам угол) будут наибольшими, когда проекция наклонной BC будет наименьшей. Если прямая p проходит через точку B, то такой наименьшей проекции наклонной не существует. Если же прямая p не проходит через точку B, то наименьшая проекция будет тогда, когда она будет перпендикулярна прямой p.

8.21. а) Отношение высоты вертикального предмета (например, рейки) к длине её тени даст тангенс угла наклона солнечных лучей к горизонтальной поверхности. б), в) Если найти отношение высоты ступени лестницы (эскалатора) к её ширине, то найдём тангенс угла наклона лестницы (эскалатора). Для эскалатора можно обойтись вообще без тригонометрии. Обычно вдоль эскалатора укреплены вертикальные светильники. Можно измерить угол между таким светильником и поверхностью, на которой он закреплен.

г) Сначала найдём расстояние между выбранными точками, учитывая масштаб карты. Затем разность высот двух выбранных точек (на хорошей карте они указываются или известны заранее) разделим на полученное расстояние между выбранными точками.

д) Будем двигаться к башне по прямой. Отметим две точки на нашем пути, найдём расстояние между ними. И каждый раз измерим угол, под которым видна башня. Теперь переходим к расчетам. Пусть мы двигались от точки A к точке B. Пусть из точки A башня видна под углом α, а из точки B она видна под углом β. Основание башни обозначим точкой L, а ее вершину обозначим точкой K. Из треугольника AKL имеем: $AL = KL : \text{tg}\alpha$. Из треугольника BKL имеем: $BL = KL : \text{tg}\beta$. Тогда $AB = (KL : \text{tg}\alpha) - (KL : \text{tg}\beta) = KL : (\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta)$. Отсюда $KL = AB(\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta)$.

Простые задачи **8.22—8.28** о котангенсе могут быть сведены к соответствующей задаче про тангенсы. Можно для этого воспользоваться двумя соображениями. Первое: котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен тангенсу другого острого угла в этом треугольнике. Второе: произведение тангенса и котангенса как острого, так и тупого угла равно 1. Поэтому самостоятельного значения задачи про котангенс не имеют.

§ 9 Подобные треугольники

9.1. Для доказательства достаточно иметь равенство только одной пары углов. Пусть в прямоугольных треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с прямым углом при вершинах C_1 и C_2 выполняется равенство: $\angle A_1 = \angle A_2$. Тогда выполняется такое равенство $\angle B_1 = \angle B_2$. Теперь запишем тангенсы углов A_1 и A_2. Имеем $\text{tg}\,A_1 = a_1 : b_1$, $\text{tg}A_2 = a_2 : b_2$. Так как равны углы A_1 и A_2, то равны и тангенсы этих углов и выполняется равенство $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$. Из этого равенства следует, что $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$.

Теперь запишем синусы углов A_1 и A_2. Так как эти углы равны, то равны и синусы этих углов. Имеем равенство $\sin A_1 = \sin A_2$, откуда следует равенство $a_1 : c_1 = a_2 : c_2$. Из этого равенства получаем: $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$.

В результате мы получили пропорциональность соответствующих сторон данных треугольников, из чего следует их подобие.

9.2. Периметр треугольника со сторонами a, b, c равен $a + b + c$. Периметр подобного ему треугольника с коэффициентом подобия k равен $ka + kb + kc$, т. е. $k\,(a + b + c)$. Отсюда и получаем нужное соотношение.

9.3. а) Пусть в равнобедренных треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ выполняется равенство: $\angle A_1 = \angle A_2$. Тогда $\angle B_1 = \angle B_2$ и $\angle C_1 = \angle C_2$. Запишем теорему синусов для углов A_1 и B_1. Имеем: $\sin A_1 : \sin B_1 = = a_1 : b_1$. Запишем теорему синусов для углов A_2 и B_2. Имеем: $\sin A_2 : \sin B_2 = a_2 : b_2$. Так как $\angle A_1 = \angle A_2$ и $\angle B_1 = \angle B_2$, то равны и синусы этих углов, т. е. выполняется равенство $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, откуда получаем $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$. Аналогично получаем $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$.

В результате мы получили пропорциональность соответствующих сторон данных треугольников, из чего следует их подобие.

б) Не имеет самостоятельного значения, так как сводится к задаче а). Однако может решаться независимо от задачи а) теми же рассуждениями.

9.4. Потому, что их стороны пропорциональны.

9.5. Если второй треугольник подобен третьему с коэффициентом k, то его соответствующие стороны получены из сторон третьего треугольника умножением на k. Но тогда стороны третьего треугольника получены умножением соответствующих сторон первого треугольника на $1 : k$. А стороны второго получаются из сторон третьего треугольника умножением на k_1. Отсюда следует, что стороны второго треугольника могут быть получены умножением соответствующих сторон первого треугольника на $k_1 : k$, что означает подобие этих треугольников с коэффициентом $k_1 : k$.

9.7. Рассмотрим ситуацию в остроугольном треугольнике. Пусть точка P — точка пересечения заданных высот. Прямоугольные треугольники AMP и CKP имеют равные вертикальные острые углы, а потому подобны (согласно задаче 9.1). Прямоугольные треугольники ABK и CBM имеют общий острый угол, а потому подобны (согласно задаче 9.1). Рассмотрим ситуацию в тупоугольном треугольнике. Прямоугольные треугольники AMP и CKP имеют равные вертикальные острые углы, а потому подобны (задача 9.1).

9.8. Эти равенства следуют из подобия прямоугольных треугольников по острому углу: BCH и ABC, ACH и ABC, BCH и ACH соответственно. Каждое соотношение записывается в виде пропорции, например, последнее так: $h : a_1 = b_1 : h$. А это равенство записывается на основании подобия указанных треугольников.

9.10. Пусть a, b — катеты одного треугольника, a_1, b_1 — катеты другого. Согласно условию, имеем такие равенства $a : a_1 = b : b_1$. Но тогда $a : b = a_1 : b_1$ и равны тангенсы соответствующих острых углов этих треугольников, а потому и сами острые углы. Тогда эти треугольники подобны (задача 9.1). Можно также применить теорему Пифагора и получить, что отношение гипотенуз такое же, как и отношение катетов.

9.11. Пусть a и c — катет и гипотенуза одного треугольника, a_1 и c_1 — катет и гипотенуза другого. Так как $a : a_1 = c : c_1$, то $a : c = a_1 : c_1$ и равны синусы соответствующих острых углов этих треугольников, а потому и сами острые углы. Тогда эти треугольники подобны (задача 9.1). Но можно применить и теорему Пифагора.

9.12. Исходный треугольник и частичный, полученный после проведения такой хорды, подобны по двум углам (соответственным при параллельных прямых). Обратное утверждение неверно. Чтобы в этом убедиться, достаточно провести такую хорду в треугольнике, которая образует с его сторонами углы, равные соответственно двум углам треугольника, но так, чтобы эти углы имели свои вершины на разных сторонах исходного треугольника. Следствием из доказанного утверждения является равенство средней линии треугольника половине параллельной ей стороны данного треугольника.

9.13. Пусть параллельные прямые a и b пересечены тремя прямыми, проходящими через данную точку P. Для упрощения рисунка будем считать данные прямые горизонтальными, а выбранную точку расположим над верхней прямой a (рис. 7, *а*). Пусть первая прямая пересекает прямые a и b соответственно в точках M_1 и N_1, вторая прямая пересекает прямые a и b соответственно в точках M_2 и N_2, третья прямая пересекает прямые a и b соответственно в точках M_3 и N_3.

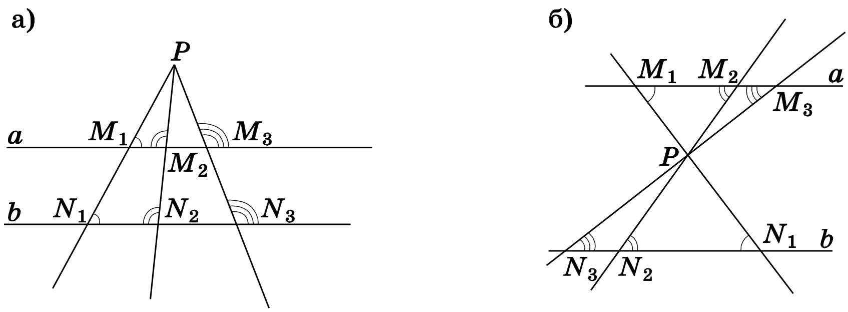


Рис. 7

Пусть на прямой a точки следуют в таком порядке M_1, M_2, M_3. На рисунке образовались пары подобных треугольников. Из подобия треугольников PM_1M_2 и PN_1N_2 получаем равенство $M_1M_2 : N_1N_2 = PM_2 : PN_2$. Из подобия треугольников PM_2M_3 и PN_2N_3 следует, что $M_2M_3 : N_2N_3 = PM_2 : PN_2$. Из полученных двух пропорций получаем такую: $M_1M_2 : N_1N_2 = M_2M_3 : N_2N_3$. Окончательно $M_1M_2 : M_2M_3 = N_1N_2 : N_2N_3$.

Тот же результат и тем же способом получается, если точка P находится между данными прямыми (рис.7, *б*). Он обобщается на любое число прямых.

9.14. Вычислим третьи углы этих треугольников. Они равны соответственно 30° и 70°. Тем самым оказывается, что эти треугольники имеют по два равных угла, а потому подобны.

9.15. Для этих треугольников достаточно равенства хотя бы одного острого угла. Отсюда будет следовать равенство и прочих углов, а потому подобие этих треугольников.

Признаком подобия прямоугольных треугольником, не следующим из общих признаков подобия, является, например, признак их подобия, сформулированный в задаче 9.11: по катету и гипотенузе. Для прямоугольных треугольников их подобие следует из равенства одноименных тригонометрических функций двух его острых углов. В самом деле, если равны, к примеру, тангенсы двух острых углов, то равны отношения катетов да ещё равны прямые углы между ними.

Для подобия равнобедренных треугольников достаточно равенства косинусов углов при основании. Действительно, если эти косинусы равны, то равны отношения половин основания к боковым сторонам, но тогда равны и отношения оснований к боковым сторонам. А из равенства косинусов следует равенство самих углов.

9.18. Достаточно к этому отрезку пристроить два угла с вершинами в концах этого отрезка, равные соответственным углам данного треугольника, причём так, чтобы вторые стороны этих углов пересеклись. В результате образуется треугольник, соответствующий требованию задачи.

9.22. Эти треугольники подобны по двум углам. А углы у них равны как накрест лежащие при основаниях трапеции и секущей их диагонали (рис. 8).

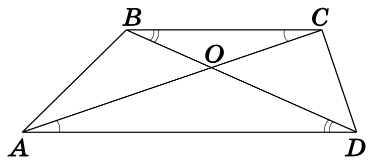


Рис. 8

9.23. Пусть через вершину A треугольника ABC проведена прямая a, параллельная прямой BC. Две другие аналогичные прямые обозначим b и c (рис. 9).

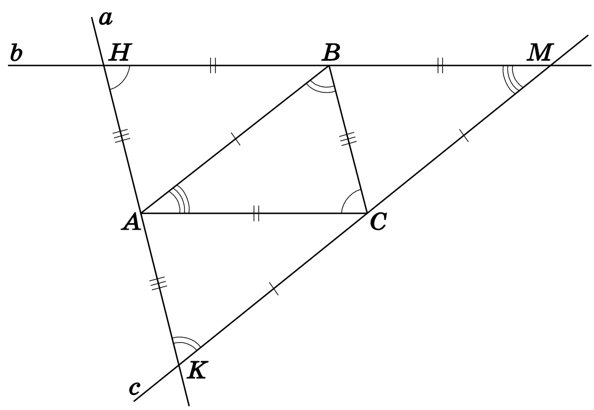


Рис. 9

Точку пересечения a и b обозначим H, точку пересечения a и c обозначим K, а точку пересечения b и c обозначим M. В треугольнике HKM углы соответственно равны углам данного треугольника. Действительно, четырёхугольники $AHBC$, $ABCK$ и $ABMC$ — параллелограммы, так как их противоположные стороны параллельны. Противоположные углы параллелограммов равны. Поэтому угол H равен углу ACB, угол K равен углу ABC и угол M равен углу BAC. Из этих равенств углов следует подобие треугольников ABC и MKH. Стороны треугольника ABC являются средними линиями треугольника MKH, а потому в два раза меньше сторон треугольника MKH. Следовательно, площадь треугольника MKH в четыре раза больше площади треугольника ABC.

9.24. Результат в этой задаче — следствие утверждения из задачи 9.13.

9.25. В этой задаче много разных ситуаций. Результат зависит от вида треугольника и от того, какая проведена биссектриса — угла при вершине или угла при основании.

Рассмотрим первый случай — треугольник прямоугольный. Пусть биссектриса проведена из его вершины. Так как треугольник является по условия равнобедренным, то проведённая биссектриса к тому же и высота. Так как каждый из полученных треугольников подобен исходному, то он равнобедренный. Эти треугольники имеют соответственно равные углы. И так как исходный треугольник имеет два равных острых угла по 45°, то не только данный треугольник, но и полученные имеют острые углы по 45°.

Пусть в равнобедренном прямоугольном треугольнике проведена биссектриса угла при основании. В одном из полученных треугольников есть тупой угол, чего нет в исходном треугольнике. Следовательно, такой случай противоречит условию, а потому находить углы такого треугольника не надо.

Рассмотрим второй случай — треугольник не является прямоугольным. Пусть биссектриса проведена из его вершины. Полученные треугольники являются прямоугольными, но в исходном треугольнике нет прямого угла. Следовательно, такая возможность противоречит рассматриваемой ситуации, а потому находить углы такого треугольника не надо.

Рассмотрим случай, когда треугольник не является прямоугольным и биссектриса проведена из вершины его угла при основании. Согласно условию, каждый из полученных треугольников подобен исходному. Один из полученных треугольников — тупоугольный. Так как он подобен исходному, то исходный треугольник также тупоугольный, причём с таким же тупым углом. Такая ситуация противоречива (по теореме о внешнем угле треугольника). Потому находить углы такого треугольника не надо.

9.26. Фалес опирался на подобие прямоугольных треугольников. В тот момент, когда тень от вертикально поставленного предмета равна высоте самого предмета, тень от пирамиды равна высоте самой пирамиды. Остаётся только найти длину тени и учесть размеры основания пирамиды.

9.27. Достаточно проверить равенство их углов, наложив их друг на друга.

9.28. 40°, 50° и 90°.

9.29. Так как у подобных треугольников один и тот же вид, то треугольник, подобный данному, имеет тот же вид, что исходный треугольник.

9.30. а) $ac : b$; б) $\frac{ac}{a+b}$; в) $\frac{a(b+c)}{b}$; г) найти невозможно; д) $\frac{ab}{c}$; е) найти невозможно, так как про хорду треугольника нет информации о том, как она расположена по отношению к сторонам данного треугольника.

9.31. а) $x = S : 3$; б) $x = S : 2$; в) $x = S : 4$; г) $x = 2S : 3$; д) $x = S : 2$, е) $x = S : 2$; ж) $x = S : 3$. Вот решение более трудной задачи ж). Треугольник с площадью x подобен треугольнику с площадью $x + S$ по равенству углов (рис. 10), а коэффициент их подобия равен $1 : 2$. Поэтому $4x = S + x$ и $x = S : 3$.

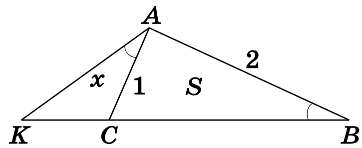


Рис. 10

9.33. в) Положим $AB = a$. Тогда $AO = 4a$ и $BO = 3a$. Следовательно, отношение сторон подобных треугольников OBC и OAD равно $3 : 4$. Пусть площади этих треугольников равны x и y соответственно. Тогда $x : y = 9 : 16$, а $y - x = S$. Поэтому $x = \frac{9}{7}S$ и $y = \frac{16}{7}S$. г) В этом случае отношение сторон подобных треугольников OBC и OAD равно $1 : 3$. Тогда $x : y = 1 : 9$, а $y - x = S$. Поэтому $x = \frac{1}{8}S$ и $y = \frac{9}{8}S$.

9.34. г) Если треугольник AKM и трапеция $KMCB$ равновелики, то площадь треугольника AKM составляет половину площади треугольника ABC, а потому $AB : AK = \sqrt{2}$. Следовательно, $(AK + KB) : AK = \sqrt{2}$ и $1 + \frac{BK}{AK} = \sqrt{2}$. Таким образом, $AK : KB = 1 : (\sqrt{2} - 1)$.

9.35. Если x — площадь треугольника, прилегающего к меньшему основанию, то площадь треугольника, прилегающего к большему основанию равна $9x$. Так как точка пересечения диагоналей разбивает её на отрезки, относящиеся как $1 : 3$ (считая от меньшего основания), то площади треугольников, прилегающих к боковым сторонам равны $3x$. Поэтому $S = 16x$.

9.36. Треугольники OAK и OBL подобны (по первому признаку подобия). Следовательно, соответственные углы этих треугольников — OAK и OBL равны. Поэтому прямые AK и BL параллельны. Аналогично доказывается параллельность прямой AK прямым CM и DN. Длины отрезков BL, CM, DN определяется коэффициентом подобия треугольников и они равны $2AK$, $3AK$ и $4AK$ соответственно.

9.37. Из условия следует, что треугольники OAB и OCD подобны (по первому признаку). Но тогда соответственные углы этих треугольников — OAB и OCD равны. Поэтому прямые AB и CD параллельны. И так как коэффициент подобия не равен 1, то отрезки AB и CD не равны. Поэтому данный четырёхугольник — трапеция.

9.38. Исходное равенство $OAOB = OCOD$ перепишем в виде пропорции: $OA : OC = OD : OB$ Тогда по первому признаку подобия треугольников заключаем, что треугольники OBC и OAD подобны. Отсюда и следует равенство указанных углов как соответственных.

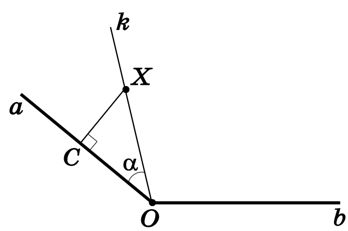
9.39. Рассмотрим угол ab и два положения точки X на проведенном луче k: X_1 и X_2. Спроектируем эти точки на стороны угла. Пусть точки A_1 и A_2 — проекции точек X_1 и X_2 на сторону a соответственно, а точки B_1 и B_2 — проекции точек X_1 и X_2 на сторону b соответственно. Треугольники OA_1X_1 и OA_2X_2 подобны (по двум углам), поэтому $A_1X_1 : A_2X_2 = OX_1 : OX_2$. Треугольники OB_1X_1 и OB_2X_2 подобны (по двум углам), поэтому $B_1X_1 : B_2X_2 = OX_1 : OX_2$. Отсюда получаем, что $A_1X_1 : B_1X_1 = A_2X_2 : B_2X_2$.

Обратное утверждение, т. е. то утверждение, что точка движется внутри угла по лучу, выходящему из его вершины, вообще говоря, неверно. Но если брать отношения расстояний до одних и тех же сторон угла, то обратное утверждение верно. Как обычно, оно доказывается от противного.

Рассмотрим два положения точки X : X_1 и X_2. Спроектируем эти точки на стороны угла. Пусть точки A_1 и A_2 — проекции точек X_1 и X_2 на сторону a соответственно, а точки B_1 и B_2 — проекции точек X_1 и X_2 на сторону b соответственно. Если точка X_2 не лежит на луче OX_1, то рассмотрим пересечение луча OX_1 с прямой A_2X_2 в точке Y. Для точек X_2 и Y не могут быть верны обе пропорции: та, которая следует из условия и та, которая следует из прямого утверждения.

Обратное утверждение можно получить иначе, найдя тангенсы углов, которые лучи OX_1 и OX_2 образуют со сторонами данного угла.

Если угол ab — тупой, то, когда угол kb — тупой, расстояние от точки X до луча b равно длине отрезка XO. Поэтому отношение расстояний до сторон угла ab равно синусу угла ak и снова постоянно (рис. 11).



$$\frac{XC}{XO} = \sin\alpha$$

Рис. 11

9.40. Сначала докажем, что $BK \perp AC$. Если допустить противное, то один из углов AKB или CKB — тупой. Пусть угол AKB — тупой. Тогда в треугольнике BKC должен быть равный ему тупой угол с вершиной B или C. Но этого быть не может, так как эти углы меньше угла AKB — внешнего для треугольника BKC. Поэтому $BK \perp AC$. Следовательно, треугольники AKB и CKB — прямоугольные с прямыми углами в вершине K. Если равны их углы в вершине B, то высота BK треугольника ABC является и его биссектрисой, а потому она разбивает треугольник ABC на два равных треугольника BAK и BCK (равенство — частный случай подобия). Если же угол A равен углу KBC, то угол C равен углу KBA, и значит угол B треугольника ABC равен сумме двух других его углов A и C. Следовательно, угол B — прямой.

9.41. Пусть от данного треугольника ABC отсекается подобный ему треугольник ABK. Тогда эти два треугольника имеют общий угол A. Углу AKB в треугольнике ABK должен быть равен один из углов B или C треугольника ABC. Равенство $\angle AKB = \angle C$ невозможно, так в этом случае прямые KB и BC были бы параллельны, а они имеют общую точку B. Поэтому $\angle AKB = \angle B$. А тогда $\angle ABK = \angle C$.

9.42. а) Один из способов такой. Выберем произвольное направление нашего движения, отличное от направления из точки стояния O на объект A. Зафиксируем угол между направлением на объект и выбранным направлением нашего движения. В направлении на объект поставим вешку V. Измерим расстояние OV. Пройдём в направлении движения некоторое фиксированное расстояние OP. Продолжим движение в выбранном направлении до того места Q, из которого угол, под которым мы наблюдаем объект A, не окажется равным углу OPV. Треугольники OPV и OQA подобны (по двум углам). И так как в треугольнике OPV всё известно, то мы можем на основании подобия найти расстояние OA.

б) Будем использовать результат задачи а). Один из способов такой. Выберем произвольное направление нашего движения, отличное от направлений из точки стояния O на объекты A и B. При этом оставим объекты A и B с одной стороны от выбранного направления движения. Найдём расстояния OV и OW. В направлении на объекты A и B поставим вешки V и W. Эти вешки поставим так, что расстояния OV и OW пропорциональны расстояниям OA и OB. Треугольники OVW и OAB подобны по первому признаку. Из этого подобия, зная VW, найдём AB.

§ 10 Применения теорем о подобии треугольников

10.1. Доказательство способом от противного. Предположим, что хорда KM не параллельна BC. Проведём тогда через точку K хорду KN, параллельную BC. Она разделит сторону AC в отношении, равном $AK : KB$. Но две точки M и N не могут разбить отрезок AC в одном и том же отношении, если считать это отношение от одного и того же конца A отрезка AC.

10.2. Доказательство способом от противного. Предположим, что хорда KM не параллельна BC. Проведём тогда через точку K хорду KN, параллельную BC. Она разделит сторону CD в отношении, равном $AK : KB$. Но две точки M и N не могут разбить отрезок CD в одном и том же отношении, если считать это отношение от одного и того же конца C отрезка CD.

10.5. а) Так как отрезки BK и KL равны, то равны отрезки CM и MN, откуда $x = 2$. Из пропорции $KL : LA = MN : NA$ получаем, что $y = 10 : 3$. б) Из пропорции $CM : MK = CN : NL$ получаем, что $y = 3 : 4$. Из пропорции $MK : KA = NL : LB$ получаем, что $x = 8 : 3$. в) Из пропорции $AO : OC = BO : OD = 2$ и пропорции $AO : OC = x : 2$ получаем, что $x = 4$. Из того, что $BO : OD = 2$, получаем, что $BO : BD = 2 : 3$, откуда получаем, что $y : 4 = 2 : 3$ и $y = 8 : 3$. Аналогично, $z = 8 : 3$.

10.6. а) Так как KM — средняя линия, то $CM = MD = 4$. По теореме о пропорциональных отрезках имеем такое равенство $PB : PC = 3 : 4$, откуда $PC = \frac{4}{3}PB$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника PBC имеем $PB^2 + PC^2 = 36$ или $PB^2 + (\frac{4}{3}PB)^2 = 36$. Тогда $PB = \frac{18}{5}$.

Из подобия треугольников PBC и PKM имеем $PK : PB = KM : BC$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $KM = 11$. Так как KM — средняя линия, то, зная одно из оснований, находим другое. Отсюда получаем $AD = 16$.

б) Из условия задачи следует, что $AK = KB = BP = 4$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника APD имеем $PA^2 + PD^2 = 169$. Тогда $PD = 5$. По теореме Фалеса имеем равенство $PB = CM = MD$, откуда $PC = \frac{5}{3}$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника PBC имеем $PB^2 + PC^2 = BC^2$. Зная PB и PC, находим $BC = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

в) Из условия задачи следует, что $CM = 8$. По теореме о пропорциональных отрезках имеем равенство $PB : BK = PC : CM$, откуда $BP = 0{,}5$. Из подобия треугольников PBC и PAD имеем равенство $BC : AD = PB : PA$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $AD = 52$.

г) Из условия задачи следует, что $PB = 3$. По теореме о пропорциональных отрезках имеем равенство $PB : BK = PB : PA$, откуда $PC = 9$. Из подобия треугольников PBC и PKM имеем равенство $BC : KM = PB : PA$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $BC = 4{,}8$. По теореме о пропорциональных отрезках имеем равенство $BK : KA = CM : MD$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $MD = 15$. Из подобия треугольников PBC и PAD имеем равенство $BC : AD = PB : PA$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $AD = 16$.

д) По теореме о пропорциональных отрезках имеем равенство $AK : KB = DM : MC$, откуда $MC = 4{,}5$. По теореме о пропорциональных отрезках имеем равенство $PB : BK = PC : CM$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $PC = 3$. Из подобия треугольников PBC и PKM имеем равенство $BC : KM = PB : PK$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $BC = 3$. Из подобия треугольников PAD и PKM имеем равенство $KM : AD = PK : PA$, откуда после подстановки известных длин отрезков получаем $AD = 9$.

10.7. Да, так строится четвертый пропорциональный отрезок для отрезков AB, a, na.

10.8. Согласно формулы площади параллелограмма, произведение его стороны на высоту параллелограмма, к ней проведённую, одно и то же. То есть $ah_a = bh_b$, где a и b — стороны параллелограмма, h_a, h_b — соответственные высоты. Из этого равенства получаем, что другая высота параллелограмма находится как четвёртый пропорциональный отрезок.

10.9. Согласно формулы площади треугольника, произведение его стороны на высоту, к ней проведённую, одно и то же. То есть $ah_a = bh_b$, где a и b — стороны треугольника, h_a, h_b — соответственные высоты. Из этого равенства получаем, что другая высота треугольника находится как четвёртый пропорциональный отрезок.

10.10. Пусть стороны данного прямоугольника a и b, а неизвестную сторону квадрата обозначим как x. Приходим к равенству $x^2 = ab$. Такой отрезок x может быть построен как высота прямоугольного треугольника, проведённая на его гипотенузу, если построить прямоугольный треугольник (как это сделано в п. 10.2), в котором гипотенуза разбита на отрезки a и b, т. е. длина которой равна $a + b$. Его высота и будет равна искомой стороне квадрата (задача 3.38).

Данная задача может рассматриваться как вводная перед пунктом 10.3

10.11. Для этого достаточно построить квадрат, сторона которого в 5 раз меньше стороны данного квадрата. Это делается на основании задачи 1 из пункта 10.3.

10.12. а) На одной стороне угла откладываем от вершины последовательно отрезки a и b, а на другой стороне этого угла откладываем от вершины отрезок e. Далее стоим четвёртый пропорциональный отрезок. б) На одной стороне угла откладываем от вершины последовательно отрезки e и a, а на другой стороне этого угла откладываем от вершины отрезок a. Далее стоим четвёртый пропорциональный отрезок. в) На одной стороне угла откладываем от вершины последовательно отрезки b и a, а на другой стороне этого угла откладываем от вершины отрезок e. Далее стоим четвёртый пропорциональный отрезок. г) На одной стороне угла откладываем от вершины последовательно отрезки b и a, а на другой стороне этого угла откладываем от вершины отрезок a. Далее стоим четвёртый пропорциональный отрезок. д) Сначала построим отрезок $a^2 : b$, как указано в предыдущем пункте. Затем строим отрезок x такой, что $x = (a^2 : b) : b$, как указано в задаче в). е). Сначала построим отрезок $b = a^2$, как указано в задаче б). Затем построим отрезок $x = ab$, как указано в задаче а).

10.13. Согласно теоретическому материалу получаем, что если исходный пятиугольник имел сторону, равную 1, то сторона полученной в нём пятиугольной звезды равна φ, а сторона полученного в нём правильного пятиугольника равна φ^2. Выражение полученных отрезков через Ф получится, если воспользоваться равенством $\Phi = 1 : \varphi$.

10.14. Пятиугольник *NPKLM* является правильным. Так как все одноименные правильные многоугольники подобны, то нужные нам отрезки могут быть найдены из соображений подобия, причём коэффициент подобия равен отношению сторон *NP* и *AB*, т. е. φ^2 .Так, для стороны *NT* получаем $NT = PB\cdot \varphi^2 = \varphi\cdot \varphi^2 = \varphi^3$.

Вообще, последовательность сторон полученных таким образом правильных пятиугольников является последовательностью чётных степеней φ, а последовательность сторон полученных таким образом правильных звёзд является последовательностью нечётных степеней φ.

Другие закономерности для степеней чисел Ф и φ приведены в задачах 10.20 и 10.21.

10.15. Пусть сторона *AB* правильного пятиугольника равна a (рис. 226 учебника). Строим равнобедренный треугольник *ABD* с углом 36° при вершине *D*. Его построение указано в задаче 9.21. На стороне *BD* как на основании строим равнобедренный треугольник BCD с углами при основании по 36°. Ещё один такой же треугольник ADF строим на отрезке AD. Пятиугольник $ABCDF$ — правильный.

10.16. Правильный десятиугольник можно разбить на 10 равнобедренных треугольников, у которых вершины находятся в центре правильного десятиугольника, а основаниями являются стороны правильного десятиугольника. Такой треугольник имеет при вершине угол 36°. Как построить такой треугольник указано в задаче 9.21. Из десяти таких треугольников составляем правильный десятиугольник.

10.17. Для нахождения этих синусов рассмотрим равнобедренный треугольник NPK — часть исходного правильного пятиугольника со стороной 1, образованный двумя сторонами пятиконечной звезды и стороной полученного правильного пятиугольника (рис. 226 из учебника). Согласно результатам задачи 10.13 боковые стороны этого треугольника равны φ, а основание равно φ^2. Угол при его вершине равен 36°, а угол при его основании равен 72°. Далее используем теорему косинусов. Имеем:

$$\cos 36° = (2\varphi^2 - \varphi^4) : (2\varphi^2) = (1 - \varphi^2) : 2 = \sin 54°.$$

$$\cos 72° = \varphi^4 : (2\varphi^3) = \varphi : 2 = \sin 18°.$$

sin36° найдём из основного тригонометрического тождества, зная cos36°.

sin108° найдём из основного тригонометрического тождества, зная $\cos 108° = -\cos 72°$.

10.18. Правильный пятиугольник можно разбить на 5 равных между собой равнобедренных треугольников, у которых основание равно 1, а вершина находится в центре правильного пятиугольника. Площадь одного такого треугольника можно найти по формуле $S = 0{,}5a^2\sin 72°$, где S — площадь, a — боковая сторона такого треугольника.

10.19. Площадь такой пятиконечной звезды можно найти как сумму площадей пяти равных между собой равнобедренных треугольников и площади правильного пятиугольника (рис. 226 учебника). В каждом таком треугольнике боковая сторона равна 1, а угол при вершине равен 36°. Поэтому площадь каждого такого треугольника равна 0,5sin36°. А площадь правильного пятиугольника можно найти способом, указанным в предыдущей задаче.

10.20. Первое равенство доказывается алгебраически. Для этого достаточно проверить, что $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} + 1$. Второе равенство доказывается алгебраически после вынесения в правой части Φ^{n-1} за скобки и последующего сокращения в обеих частях равенства на это выражение.

10.21. Первое равенство доказывается алгебраически. Для этого достаточно проверить, что $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$. Второе равенство доказывается алгебраически после вынесения в правой части φ^{n-1} за скобки и последующего сокращения в обеих частях равенства на это выражение.

10.22. Для вычисления медианы на основание используем теорему Пифагора. Получаем 6 см. А для нахождения медиан треугольника на боковую сторону используем результат задачи 7.37: $(2m)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$, где m — медиана на сторону c в треугольнике со сторонами a, b, c. Получаем: $(2m)^2 = 2(256 + 100) - 100$, $m^2 = 153$, $m = 3\sqrt{17}$ см.

10.23. Медиана, проведённая на гипотенузу, равна половине гипотенузы. Медианы, проведенные к катетам, считаем по теореме Пифагора.

10.24. Зная стороны треугольника, можно найти длины всех его медиан. Угол между двумя медианами можно найти по теореме косинусов из треугольника, являющего частью данного, образованного половиной стороны, третью одной медианы и двумя третьими другой медианы.

10.25. Пусть медианы треугольника ABC пересекаются в точке T. Продлим медиану BB_1 на сторону AC за середину B_1 стороны AC на отрезок B_1T_1, равный трети медианы BB_1 (рис. 12).

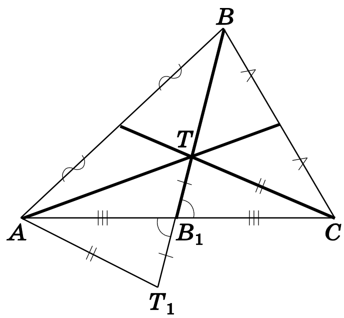


Рис. 12

В треугольнике ATT_1, мы знаем все его стороны — они равны двум третьим от медиан треугольника. Построив этот треугольник ATT_1 по трём сторонам, мы можем найти точку B_1, которая делит отрезок AC пополам. Затем найдём точку C, продлив отрезок AB_1 за точку B_1 на отрезок $B_1C = AB_1$. И, наконец, найдём точку B, продлив отрезок TT_1 за точку T на отрезок, равный TT_1.

10.26. Пусть медианы треугольника ABC пересекаются в точке T. Проведём медиану BB_1 на сторону AC. Рассмотрим треугольник ABB_1. Его площадь составляет половину площади исходного треугольника. Теперь рассмотрим треугольник ATB_1. Его площадь составляет треть от площади треугольника ABB_1, т. е. шестую часть от площади исходного треугольника. Тот же результат мы получаем для любого треугольника, являющегося частью данного, образованного половиной стороны треугольника, третью одной медианы и двумя третьими другой.

10.27. Пусть медианы треугольника ABC пересекаются в точке T. Проведём медиану BB_1 на сторону AC, медиану CC_1 на сторону AB, медиану AA_1 на сторону BC. Пусть медиана BB_1 пересекает среднюю линию A_1C_1 в точке K (рис. 13).

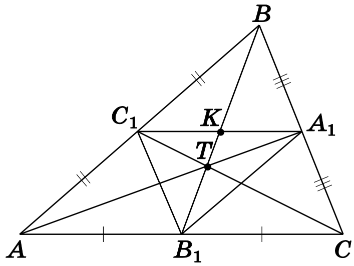


Рис. 13

В параллелограмме $BC_1B_1A_1$ медиана BB_1 и средняя линия A_1C_1 являются диагоналями, а потому точка K делит отрезок A_1C_1 пополам. Поэтому B_1K — половина медианы BB_1 _ является медианой в треугольнике $A_1B_1C_1$. Аналогичное рассуждение проводим и для остальных медиан треугольника ABC — их половины являются медианами треугольника $A_1B_1C_1$. А потому и их точкой пересечения является точка T.

10.28. Пусть медианы треугольника ABC с неравными сторонами пересекаются в точке T. Пусть $AB > BC$. Рассмотрим треугольник ABT. Его площадь составляет треть площади исходного треугольника (согласно задаче 10.26). Рассмотрим треугольник BCT. Его площадь также составляет треть площади исходного треугольника (согласно задаче 10.2). Значит, эти треугольники равновелики. Но так как $AB > BC$, то высота треугольника ABT меньше высоты треугольника BCT, если эти высоты проведены из точки T. Отсюда получаем, что точка пересечения медиан треугольника ближе к большей стороне треугольника.

Задачи к главе II

II.1. Пусть надо вычислить биссектрису AK в треугольнике ABC, в котором известны стороны AB и AC, а также угол A между ними. Сначала по теореме косинусов найдём сторону BC. Далее, в соответствии со свойством биссектрисы угла треугольника, зная стороны треугольника и отношение, в котором биссектриса AK делит сторону BC, найдем отрезки CK и BK. Затем рассмотрим треугольник ACK. Угол C найдём по теореме косинусов из данного треугольника ABC. Затем из треугольника ACK, зная угол C, найдем длину биссектрисы AK по теореме косинусов.

II.2. Пусть AB и AC хорды, проведенные из точки A окружности радиуса R с центром O. Проведём радиусы OB и OC. По теореме косинусов найдём угол OAC из треугольника AOC. По теореме косинусов найдём угол OBC из треугольника BOC. Искомый угол найдём как сумму найденных углов.

II.3. а) Проведём диагональ ромба. Площадь полученного треугольника найдём по формуле $S = 0{,}5a^2\sin\varphi$, где S — площадь треугольника, a — его сторона, φ — угол между сторонами. А площадь всего ромба в два раза больше полученной площади треугольника. б) Площадь треугольника, ограниченного двумя сторонами ромба и его диагональю, найдём по формуле Герона. А площадь всего ромба в два раза больше полученной площади треугольника. Можно по теореме Пифагора найти вторую диагональ, а затем полупроизведение диагоналей даст площадь ромба. в) Зная высоту ромба и его угол, можно найти его сторону из прямоугольного треугольника, у которого известен катет и противолежащий ему угол. Тем самым, задача сведена к задаче пункта а). Пусть известен угол, противолежащий данной диагонали. Из треугольника, ограниченного этой диагональю и двумя сторонами ромба, найдём по теореме косинусов сторону ромба. Тем самым, задача сведена к задаче пункта а).

II.4. Прямую, проходящую через A и перпендикулярную AB, назовём a, Прямую, проходящую через B и перпендикулярную BC, назовём b, Прямую, проходящую через C и перпендикулярную CA, назовём c. Точку пересечения прямых a и b назовём C_1. Точку пересечения прямых b и c назовём A_1. Точку пересечения прямых c и a назовём B_1. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны по 60° (так как острые углы в треугольниках ABC_1, BCA_1 и ACB_1 равны 30° и 60°). Так как равносторонние треугольники подобны, то треугольники $C_1A_1B_1$ и ACB подобны.

Пусть сторона исходного треугольника равна a. Из треугольника A_1BC получаем, что $A_1B=\frac{\sqrt{3}}{3}\,a$, $A_1C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\,a$. Отсюда находим сторону A_1B_1 треугольника $C_1A_1B_1$, она равна $\sqrt{3}\,a$. Так как коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$, то площадь треугольника $C_1A_1B_1$ равна площади исходного треугольника, умноженной на квадрат коэффициента подобия, т. е. на 3.

II.5. а) Заданной диагональю такой четырёхугольник разбивается на два трегольника, стороны которых известны. Площадь каждого из них можно найти по формуле Герона. б) По теореме косинусов найдём диагональ, лежащую напротив известного угла, после чего задача сводится к задаче из пункта а). в) Заданная диагональ разбивает четырёхугольник на два треугольника, которые можно решить по теореме синусов и найти все стороны данного четырёхугольника. Задача свелась к задаче из пункта а).

II.6. Как следует из формулы площади треугольника, наименьшая высота треугольника проводится на его наибольшую сторону. Площадь треугольника находим по формуле Герона. Она равна $\frac{15}{4}\sqrt{7}$. Поэтому наименьшая высота равна $\frac{5}{4}\sqrt{7}$.

Для нахождения медианы из вершины C можно воспользоваться формулой $m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2$ для медианы, указанной в задаче 7.37. Если написать аналогичную формулу для медианы $m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$, то получим, что $m_c^2 - m_a^2 = \frac{3}{4}(a^2 - c^2)$. Следовательно, m_c больше m_a тогда и только тогда, когда a больше c. Итак, наибольшая в треугольнике медиана проводится к наименьшей его стороне. В данном треугольнике наибольшая медиана проводится к стороне 4 и равна $\sqrt{\frac{53}{2}}$.

Для нахождения биссектрисы сначала по теореме косинусов найдём углы (точнее, косинусы углов) треугольника. Они равны $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{16}$, и $\frac{1}{8}$. Далее найдем отрезки, на которые разбивают биссектрисы противоположные стороны треугольника, а затем по теореме косинусов найдем длины биссектрис. Средняя биссектриса находится сравнением длин полученных биссектрис. Ею будет биссектриса, проведенная к стороне 5 (она делит её на отрезки 2 и 3), и её длина равна $3\sqrt{2}$.

Задачи о медианах и биссектрисах естественно предложить для коллективной работы в классе.

II.7. Высота, проведённая на гипотенузу a, не превосходит медианы, проведённой к ней. А наибольшее значение этой высоты равно медиане, проведённой к гипотенузе, Оно равно $\frac{a}{2}$. Так как в треугольнике с наибольшей площадью высота на гипотенузу, совпадает с медианой, к ней проведённой, то такой треугольник является равнобедренным.

II.8. Пусть в трапеции $ABCD$ с основанием AD продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке K, точка M — середина основания BC, точка N — середина основания AD, точка L — точка пересечения диагоналей (рис. 14). Проведём через точку L хорду трапеции ST, параллельную основаниям (точка S принадлежит AB, точка T принадлежит CD).

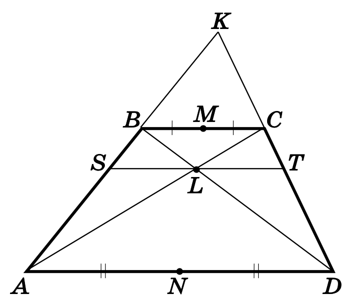


Рис. 14

Из подобия треугольников BSL и BAD следует, что $SL : AD = BL : BD$.

Из подобия треугольников BCL и BAD следует, что $BL : LD = CL : LA$, откуда следует, что. $BL : BD = CL : CA$.

Из подобия треугольников CTL и CDA следует, что $TL : AD = CL : CA$.

Из этих пропорций получаем, что $SL : AD = TL : AD$, откуда следует, что $SL = TL$, т. е. точка пересечения диагоналей трапеции делит пополам хорду трапеции, проходящую через неё и параллельную основаниям.

Согласно задаче 9.24. медиана KN треугольника AKD делит каждую хорду этого треугольника, параллельную стороне AD, пополам. Тем самым она делит пополам и основание трапеции BC, и хорду ST. Так как середина у отрезка одна, то точки K, M, L, N лежат на одной прямой.

II.9. Пусть на данном отрезке AB зафиксирована точка C. Пусть переменная прямая x, проходящая через точку C, образует с прямой AB острый угол. Проведём перпендикуляры из точек A и B на прямую x — AM и BN. Так как треугольники AMC и

BNC подобны, то $AM : BN = AC : BC$. Так как точка C фиксирована, то отношение $AC : BC$ фиксировано, а потому и отношение $AM : BN$ фиксировано.

II.10. Так как треугольники ABO и A_1B_1O подобны, то

$A_1B_1 : AB = OB_1 : OB$. Так как треугольники CBO и C_1B_1O подобны, то

$C_1B_1 : CB = OB_1 : OB$. Из этих двух пропорций следует пропорция

$A_1B_1 : AB = C_1B_1 : CB$. Так как треугольники ACO и A_1C_1O подобны, то $A_1C_1 : AC = OA_1 : OA = OB_1 : OB = C_1B_1 : CB$. Получается, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, так как их соответственные стороны пропорциональны. б) Доказательство такое же, как и в пункте а). в) Будет, ибо доказательство не изменится.

II.11. Из треугольника AKB по теореме синусов имеем:

$KA : AB = \sin\alpha : \sin \angle AKB$. Из треугольника CKB по теореме синусов имеем: $KC : CB = \sin\beta : \sin \angle CKB$. Так как углы AKB и CKB смежные, то их синусы равны. Используя это равенство, из полученных пропорций получаем требуемое утверждение.

Из этого результата можно получить известное свойство биссектрисы треугольника: она делит сторону треугольника, к которой проведена, на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам. Для доказательства этого достаточно считать, что в полученной пропорции углы α и β равны. Также можно получить и утверждение, являющееся признаком биссектрисы угла треугольника: если хорда треугольника, выходящая из его вершины, делит сторону треугольника пропорционально прилежащим к ней сторонам треугольника, то эта хорда является биссектрисой треугольника. В самом деле, в этом случае оказывается, что синусы углов α и β равны, а так как эти углы необходимо острые, то из равенства синусов следует равенство самих углов.

II.12. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведены диагональ AC и средняя линия KL (точка K лежит на AB, точка L лежит на CD). Пусть средняя линия пересекает диагональ AC в точке M (рис. 15).

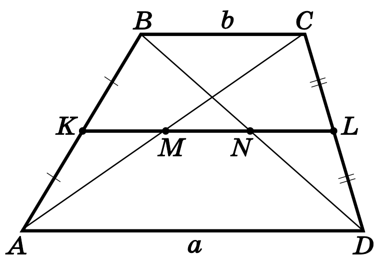


Рис. 15

а) Нет. Части средней линии KM и ML не могут быть равны, так как каждая из них равна половине соответствующего основания, которые в трапеции не равны. б) Так как $KM = \frac{b}{2}$, а $ML = \frac{a}{2}$, то $KM : ML = \frac{b}{a}$. Пусть средняя линия пересекает диагональ BD в точке N. Тогда имеем: $MN = AN - AM = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a - b)$.

в) Части KM и NL равны, так как каждая из них равна $\frac{b}{2}$. Если $KM = MN$, то $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a - b)$, а это возможно.

II.13. Это невозможно. Докажем от противного. Пусть такое выполняется. Так как каждая из двух частей средней линии в этой ситуации равна половине меньшего основания трапеции, то в сумме эти две части средней линии дадут меньшее основание, тем самым получаем, что средняя линия равна меньшему основанию трапеции. Однако средняя линия равна полусумме оснований, а такая полусумма не может равняться ни одному из двух слагаемых в этой сумме.

II.14. Пусть ребро $PA = a$, ребро $PB = b$, ребро $PC = c$, ребро $AB = x$, ребро $BC = y$, ребро $CA = z$.

По теореме Пифагора: $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = b^2 + c^2$, $z^2 = c^2 + a^2$. Сравнивая квадраты, видим, что квадрат любого ребра основания меньше суммы квадратов двух других рёбер основания, откуда делаем вывод, что основанием такого тетраэдра является остроугольный треугольник.

II.15. Пусть точке A соответствует точка C. Проведём прямую CY. Треугольники OAX и OCY подобны (по двум сторонам и углу между ними). Из этого подобия следует равенство углов OAB и OCY, а потому параллельность прямых AB и CY. Вне этой прямой точки, соответствующие точкам отрезка AB лежать не будут. Предположим противное, что такая точка Z нашлась. Луч OZ пересекает прямую CY в какой-то точке P. Тогда на луче OZ есть две точки таких, что получаются из отрезка OX умножением его на 2, что невозможно. При этом точки, соответствующие точкам X отрезка AB не могут оказаться за пределами отрезка CD, где точка D такая, что $OD = 2OB$. Иначе окажется, что она получена из точки, лежащей вне отрезка AB. Итак, точка Y будет двигаться по отрезку CD.

Результат будет тем же при умножении отрезка OX на любое положительное число.

II.16. Так как катера вышли одновременно и двигаются с постоянными скоростями, то расстояние между ними изменяется пропорционально времени движения. Во сколько раз возросло время движения, во столько же раз возрастает и расстояние между ними. При желании можно нарисовать треугольник, изображающий эту ситуацию. Две стороны этого треугольника соответствуют траекториям этих катеров, а третья сторона соответствует расстоянию между ними. Все такие треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому через 2 минуты расстояние будет равно 2 км, через 3 минуты — 3 км, через 10 минут — 10 км.

II.17. а) Пусть KL — уличный фонарь (лампа в точке K) и вы идете к нему по прямой. Вначале вы были в точке A, а ваша тень была AC. Затем вы оказались в точке B, а ваша тень была BD. Требуется сравнить AC и BD. Пусть AP — ваше первое положение (в точке P — голова), BQ — ваше второе положение (в точке Q — голова). Вашу тень в точке A можно найти из треугольника APC : $AC = = AP : \operatorname{tg} \angle ACP$. Вашу тень в точке B можно найти из треугольника BQD : $BD = BQ : \operatorname{tg} \angle BDK$. Так как

$\angle ACP < \angle BDK$, то тень AC больше тени BD: тень уменьшается, когда вы приближаетесь к фонарю.

б) Пусть KL — уличный фонарь (лампа в точке K) и вы идете мимо него по прямой. Вы находитесь в точке A, а ваша тень AC. Пусть AP — ваше положение (в точке P — голова). Из треугольника APC находим $AC = AP : \operatorname{tg}\varphi$ (φ — угол, под которым из точки C виден фонарь). Ваш рост AP — величина постоянная. Угол φ возрастает по мере приближения к такому положению на прямой, когда вы окажетесь в точке, являющейся проекцией точки L на прямую. (Это ясно из переменного треугольника KCL, в котором KL — величина постоянная, а отрезок LC становится кратчайшим именно в этот момент.) Поэтому по мере приближения к точке L ваша тень уменьшается.

II.18. Так как стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата, то каждая из них отсекает от квадрата равнобедренный прямоугольный треугольник. Обозначив стороны прямоугольника как x и y получим, что сторона квадрата разбивается вершинами прямоугольника на отрезки, равные $\frac{x}{\sqrt{2}}$ и $\frac{y}{\sqrt{2}}$. Так как сумма двух таких смежных отрезков равна стороне квадрата, то, согласно условию, имеем равенство $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1$, откуда следует, что сумма $x + y$ постоянна и равна $\sqrt{2}$. В результате получаем, что периметр этого прямоугольника один и тот же и равен $2\sqrt{2}$.

II.19. Четырёхугольник AA_1B_1B разбивается отрезком CC_1 на два четырёхугольника AA_1CC_1 и BB_1CC_1 (рис. 16).

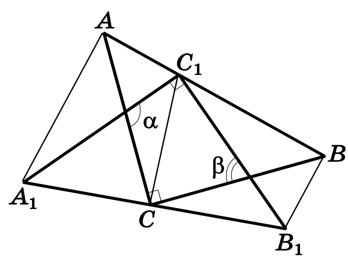


Рис. 16

Площадь каждого из них можно найти по формуле $S = 0{,}5ab\sin\varphi$, где S — площадь, a и b — его диагонали, а φ — угол между диагоналями. Для четырёхугольника AA_1CC_1 получаем, что $S(AA_1CC_1) = 0{,}5AC A_1C_1 \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями AC и A_1C_1. Аналогично, $S(BB_1CC_1) = 0{,}5BC B_1C_1 \sin\beta$, где β — угол между диагоналями BC и B_1C_1. Так как диагоналями этих четырёхугольников являются катеты данных прямоугольных треугольников, равные по условию, получаем, что равенство этих площадей сводится к равенству синусов углов между их диагоналями. Но сумма углов α и β равна 180°, (что следует из четырёхугольника, ограниченного частями четырёх катетов данных прямоугольных треугольников) поэтому эти синусы равны, откуда и следует равенство площадей четырёхугольников AA_1CC_1 и BB_1CC_1.

3. Тесты

В каждом тесте содержится пять утверждений, на каждое из которых можно дать один из трёх видов ответов: «да» (оно кодируется знаком +), «нет» (оно кодируется знаком –), «не знаю» (оно кодируется знаком 0). За каждый правильный ответ знаками + (плюс) или – (минус) ставится +1, за каждый неправильный ответ этими знаками ставится –1, а за ответ «не знаю» ставится 0. Таким образом, по каждому тесту можно набрать от +5 до –5 баллов.

Тесты к введению

После изучения введения можно повторить некоторые тесты к 7 классу, связанные с треугольниками. Например, вот эти.

Тест 1. Свойства равнобедренного треугольника

Верны следующие утверждения:

В любом равнобедренном треугольнике:

1) хотя бы одна медиана является его биссектрисой;
2) хотя бы одна биссектриса не является его высотой;
3) хотя бы две высоты равны;
4) хотя бы одна высота лежит внутри него;
5) найдутся две оси симметрии.

Ответы: + – + + –

Тест 2. Признаки равнобедренного треугольника

Верны следующие утверждения:

Треугольник является равнобедренным, если:

1) два его угла равны;
2) у него есть ось симметрии;
3) одна из его биссектрис является его высотой;
4) его вершины находятся в вершинах квадрата;
5) его вершины находятся в вершинах A, C, B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответы: + + + + +

Тест 3. Сумма углов треугольника

Верны такие утверждения:

1) если каждый из двух углов треугольника больше 60°, то его третий угол меньше 60°;
2) если угол при вершине равнобедренного треугольника меньше 100°, то угол при его основании меньше 40°;
3) если один из углов прямоугольного треугольника не меньше 30°, то в нем найдется угол не больше, чем 60°;
4) каждый угол треугольника меньше суммы двух других углов;
5) при увеличении одного из углов треугольника другие два уменьшаются.

Ответы: + – + – –

Тест 4. Сумма углов треугольника

Верны следующие утверждения:

1) если в треугольнике один из углов равен сумме двух других, то этот треугольник — прямоугольный;

2) наибольший угол треугольника больше суммы двух других;

3) средний по величине угол треугольника больше 60°;

4) если из двух треугольников составить многоугольник, то сумма углов этого многоугольника равна 360°;

5) если у двух равнобедренных треугольников есть по равному углу, то и остальные их углы соответственно равны.

Ответы: + – – – –

Чтобы сохранить пространственные представления учеников, стоит провести следующее тестирование на пространственное мышление:

Тест 5. Куб и его элементы

Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Верны следующие утверждения:

1) отрезки DD_1 и A_1C_1 пересекаются;

2) треугольник BCC_1 — тупоугольный;

3) треугольник A_1C_1B — равносторонний;

4) луч C_1B_1 является биссектрисой угла A_1C_1B;

5) тетраэдр BA_1C_1D — правильный.

Ответы: – – + – +

Тесты к главе I

Тест 6. Четырёхугольники (к п. 1.3)

Верны следующие утверждения:

1) в четырёхугольнике любая сторона меньше суммы трёх других его сторон;

2) в четырёхугольнике любой угол меньше суммы трёх других его углов;

3) в выпуклом четырёхугольнике любой угол меньше суммы трёх других его углов;

4) диагонали любого четырёхугольника пересекаются;

5) диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются.

Ответы: + – + – +

Тест 7. Правильный пятиугольник (к п. 1.4.)

Верны следующие утверждения:

В правильном пятиугольнике:

1) все диагонали равны;

2) сторона равна половине диагонали;

3) есть взаимно перпендикулярные диагонали;

4) диагонали, исходящие из одной вершины, делят угол пятиугольника на равные части;

5) пятиугольник можно разбить на три равнобедренных треугольника.
Ответы: + – – + +

Тест 8. Правильный шестиугольник (к п. 1.4.)
Верны следующие утверждения:
В правильном шестиугольнике:
1) все диагонали равны;
2) сторона равна половине одной из диагоналей;
3) есть взаимно перпендикулярные диагонали;
4) диагонали, исходящие из одной вершины, делят угол шестиугольника на равные части;
5) шестиугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника.
Ответы: – + + + +

Тест 9. Признаки прямоугольного треугольника (к п. 3.1)
Верны следующие утверждения:
Треугольник является прямоугольным, если:
1) разность квадратов двух его сторон равна квадрату его третьей стороны;
2) его стороны равны половинам соответственных сторон прямоугольного треугольника;
3) его стороны больше на один и тот же отрезок соответственных сторон прямоугольного треугольника;
4) его вершины находятся в вершинах прямоугольника;
5) его вершины находятся в вершинах прямоугольного параллелепипеда.
Ответы: + + – + –

Тест 10. Квадрат (к п. 3.3)
Верны следующие утверждения:
В квадрате:
1) существует точка, из которой каждая его сторона видна под прямым углом;
2) существуют две точки на соседних сторонах, расстояние между которыми равно стороне квадрата;
3) существуют три точки на его сторонах, которые являются вершинами равностороннего треугольника;
4) существуют четыре точки на его сторонах (не середины), которые являются вершинами другого квадрата;
5) существует хорда, которая делит пополам его площадь и не проходит через его центр.
Ответы: + + + + –

Тест 11. Прямоугольный треугольник (к п. 4.1)
Верны следующие утверждения:
Если гипотенуза прямоугольного, но не равнобедренного треугольника равна 2, то:

1) его периметр больше 4;
2) разность его катетов меньше 2;
3) его медиана, проведенная к гипотенузе, меньше 1;
4) его высота, опущенная на гипотенузу, меньше 1;
5) его площадь меньше 1.
Ответы: + + – + +

Тест 12. Равнобедренный треугольник (к п. 4.1)
Верны следующие утверждения:
Если боковые стороны равнобедренного треугольника равны 2, а угол α между ними больше 60°, то:
1) его периметр больше 6;
2) его высота, проведенная к основанию, меньше $\sqrt{3}$;
3) расстояние от середины его основания до середины его боковой стороны равно 1;
4) при возрастании угла α его площадь возрастает;
5) его площадь может быть равна 2.
Ответы: + + + – +

Тест 13. Треугольник с двумя заданными сторонами (к п. 4.1)
Верны следующие утверждения:
Если в треугольнике сторона равны 5, 12, *a*, то:
1) существует единственное значение *a*, при котором этот треугольник — равнобедренный;
2) существуют такие значения *a*, при которых этот треугольник — тупоугольный;
3) при любом значении *a* площадь треугольника не больше 60;
4) при $a = 13$ высота на эту сторону разбивает данный треугольник на два треугольника с соответственно равными углами;
5) при возрастании *a* площадь треугольника возрастает.
Ответы: + + + + –

Тест 14. Углы трапеции (к п. 4.3)
Верны следующие утверждения:
1) трапеция может иметь три острых угла;
2) существует трапеция, которая имеет единственный прямой угол;
3) если трапеция имеет единственный тупой угол, то эта трапеция — прямоугольная;
4) два равных друг другу угла может иметь лишь равнобедренная трапеция;
5) два равных друг другу острых угла может иметь лишь равнобедренная трапеция.
Ответы: – – + – +

Тест 15. Трапеция (к п. 4.3)
Верны следующие утверждения:

Если диагональ AC разбивает трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC на два прямоугольных треугольника, то:
1) отрезок AC является гипотенузой каждого из этих треугольников;
2) эти треугольники имеют соответственно равные друг другу углы;
3) угол A этой трапеции — прямой при условии, что AC является биссектрисой угла A;
4) треугольники ABC и ACD — равнобедренные при условии, что AC является биссектрисой угла A этой трапеции;
5) площадь треугольника ACD в два раза больше площади треугольника ABC при условии, что AC является биссектрисой угла A этой трапеции.
Ответы: – + + + +

Тест 16. Трапеция (к п. 4.3)
Верны следующие утверждения:
Если диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC является биссектрисой её угла A, то
1) $AB = BC$;
2) треугольники ABC и ACD — равновелики;
3) $\angle CAD = 30°$ при условии, что треугольник ACD — прямоугольный;
4) $AD = 2BC$ при условии, что $\angle A = 60°$;
5) площадь трапеции $ABCD$ в 3 раза больше площади треугольника ABC при условии, что $\angle ABC = 120°$.
Ответы: + – + + +

Тест 17. Параллелограмм (к п. 5.1)
Верны следующие утверждения:
Если четырёхугольник является параллелограммом, то:
1) внутри него есть точка, равноудалённая от всех его вершин;
2) внутри него есть точка, равноудалённая от трёх его сторон;
3) самая большая его хорда — его диагональ;
4) у него не может быть осей симметрии;
5) его диагонали разбивают его на равновеликие треугольники.
Ответы: – – + – +

Тест 18. Параллелограмм (к п. 5.1—5.3)
Верны следующие утверждения:
1) Если диагональ разбивает параллелограмм на прямоугольные треугольники, то этот параллелограмм является прямоугольником.
2) Если диагональ разбивает параллелограмм на равнобедренные треугольники, то этот параллелограмм является ромбом.
3) Если диагонали разбивают параллелограмм на прямоугольные треугольники, то этот параллелограмм является ромбом.
4) Если диагонали разбивают параллелограмм на равнобедренные треугольники, то этот параллелограмм является прямоугольником.

5) Если прямая разбивает параллелограмм на равновеликие части, то она проходит через центр симметрии параллелограмма.
Ответы: – – + + +

Тесты к главе II

Тест 19. Синус (к п. 6.1—6.4)
Следующие утверждения верны:
1) Если угол увеличивается, то синус его увеличивается.
2) Если острый угол прямоугольного треугольника увеличивается, то синус его увеличивается.
3) Сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника больше 1.
4) Сумма квадратов синусов углов прямоугольного треугольника равна 2.
5) Если синусы всех углов четырёхугольника равны друг другу, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
Ответы: – + + + –

Тест 20. Применения синуса (к п. 6.5—6.6)
Следующие утверждения верны:
1) Если синусы двух углов треугольника равны, то эти углы равны друг другу.
2) Если синусы двух углов четырёхугольника равны, то эти углы равны друг другу.
3) Если угол треугольника увеличивается, а длины заключающих его сторон не изменяются, то площадь треугольника увеличивается.
4) Среди всех параллелограммов с заданными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольник.
5) Среди всех четырёхугольников с заданными диагоналями наибольшую площадь имеет тот, диагонали которого взаимно перпендикулярны.
Ответы: + – – + +

Тест 21. Косинус (к п. 7.1—7.4)
Следующие утверждения верны:
1) Если величина угла возрастает, то косинус его уменьшается.
2) Если косинусы всех углов треугольника неотрицательны, то это остроугольный треугольник.
3) Существует параллелограмм, косинусы всех углов которого равны друг другу.
4) Существует трапеция, косинусы всех углов которой равны друг другу.
5) Сумма косинусов углов прямоугольного треугольника больше 1.
Ответы: + – + – +

Тест 22. Теорема косинусов (к п. 7.5)
Следующие утверждения верны:
1) Если две стороны треугольника не меняются, а заключающий их угол треугольника увеличивается, то третья сторона треугольника возрастает.
2) В параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.

3) Существует параллелограмм, стороны которого равны 4 и 6, а диагонали равны 6 и 8.
4) В треугольнике со сторонами 4, 5, 6 угол против стороны 5 меньше 60°.
5) В равнобедренной трапеции с основаниями 3 и 5 и боковой стороной 4 диагональ меньше 6.
Ответы: + + – + +

Тест 23. Средние линии (к п. 7.6)
Следующие утверждения верны:
1) Высоты равновеликих трапеций, у которых равны средние линии, равны.
2) Высоты равновеликих треугольников, у которых равны средние линии, равны.
3) Треугольник, имеющий две равные средние линии, равнобедренный.
4) Существует треугольник, имеющий взаимно перпендикулярные средние линии.
5) Существует треугольник, у которого сумма двух его средних линий равна третьей его средней линии.
Ответы: + + + + –

Тест 24. Подобные треугольники (к § 9)
Следующие утверждения верны:
Два треугольника подобны, если:
1) оба они прямоугольные, катеты одного из них 1 и 2, а у другого угол равен 60°;
2) один треугольник имеет углы 20° и 150°, а другой имеет углы 10° и 20°;
3) две стороны и медиана к третьей стороне одного треугольника пропорциональны соответствующим двум сторонам и медиане третьей стороны другого треугольника;
4) высоты одного из них в три раза больше соответствующих высот другого;
5) они являются сечениями тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости грани этого тетраэдра.
Ответы: – + + + +

Тест 25. Подобные треугольники (к § 9)
Следующие утверждения верны:
Два треугольника подобны, если:
1) оба они равнобедренные и прямоугольные;
2) внешние углы двух углов одного треугольника равны внешним углам двух углов другого треугольника;
3) две стороны и высота к третьей стороне одного треугольника пропорциональны соответствующим двум сторонам и высоте к третьей стороны другого треугольника;
4) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и один из углов первого треугольника равен углу второго треугольника;

5) они являются треугольниками, которые имеют вершину в точке пересечения диагоналей трапеции, а противолежащими этой вершине сторонами имеют основания трапеции.
Ответы: + + – – +

Тесты для итогового повторения

Тест 26. Свойства треугольника
Следующие утверждения верны:
Если в треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 7$, $CA = 5$, то в этом треугольнике:
1) есть прямой угол ;
2) угол A тупой;
3) площадь больше 10;
4) биссектриса угла C меньше 4;
5) медиана из вершины C меньше 6.
Ответы: – + – – +

Тест 27. Свойства треугольника
Следующие утверждения верны:
Если в треугольнике ABC $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle B = 120°$, то в этом треугольнике:
1) $AC > 4$;
2) $\angle A > \angle C$;
3) площадь больше 3;
4) наименьшая высота выходит из вершины B;
5) медиана из вершины C равна $\sqrt{13}$.
Ответы: + + – + +

Тест 28. Равнобедренный треугольник
Следующие утверждения верны:
Существуют два таких равнобедренных треугольника, из которых можно составить, совмещая их стороны:
1) квадрат;
2) прямоугольник, но не квадрат;
3) ромб;
4) трапецию;
5) параллелограмм, но не ромб.
Ответы: + – + + +

Тест 29. Правильный многоугольник
Следующие утверждения верны:
Многоугольник является правильным, если:
1) равны друг другу все его стороны и равны друг другу все его диагонали;
2) равны друг другу все его углы и равны друг другу все его диагонали;
3) его вершины являются серединами сторон правильного многоугольника;

4) его вершинами являются взятые через одну вершины правильного многоугольника с четным числом сторон;
5) он является сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания пирамиды.
Ответы: + – + + +

Тест 30. Правильный многоугольник
Следующие утверждения верны:
1) Существует правильный многоугольник, все диагонали которого равны друг другу.
2) В каждом правильном многоугольнике с четным числом сторон существуют взаимно перпендикулярные диагонали.
3) Каждый правильный многоугольник имеет центр симметрии.
4) Существуют правильные многоугольники, которые можно разбить на равные друг другу правильные многоугольники.
5) Существуют призмы, каждая грань которых является правильным многоугольником.
Ответы: + + – + +

Тест 31. Правильный шестиугольник
Следующие утверждения верны:
Пусть *ABCDFG* — правильный шестиугольник и *S* — его площадь. Тогда:
1) площадь треугольника *ABC* равна $\frac{1}{6}S$;
2) площадь треугольника *ACF* равна $\frac{1}{2}S$;
3) площадь треугольника *ACD* равна $\frac{1}{3}S$;
4) вершины шестиугольника *ABCDFG* не являются вершинами прямоугольных треугольников;
5) каждая диагональ шестиугольника *ABCDFG* проходит через его центр.
Ответы: + + + – –

Тест 32. Равновеликость
Следующие утверждения верны:
Пусть *ABCD* — трапеция с основаниями *AD* и *BC*, *M* — точка пересечения прямых *AB* и *CD*, а *O* — точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Тогда равновелики:
1) треугольники *ABD* и *ACD*;
2) треугольники *ABO* и *OCD*;
3) треугольники *AOD* и *BOC*;
4) треугольники *ABC* и *ABD*;
5) треугольники *AMC* и *BMD*.
Ответы: + + – – +

Тест 33. Сравнение площадей

Следующие утверждения верны:

Пусть в треугольнике ABC точки K и M — середины сторон BA и BC соответственно, а P — точка пересечения медиан треугольника. Тогда имеют место такие отношения площадей треугольников:

1) $S(\triangle AMK) : S(\triangle ABC) = 1 : 4$;
2) $S(\triangle PMK) : S(\triangle APC) = 1 : 4$;
3) $S(\triangle APC) : S(\triangle ABC) = 1 : 3$;
4) $S(\triangle APK) : S(\triangle APC) = 1 : 3$;
5) $S(\triangle APK) : S(\triangle ABC) = 1 : 6$.

Ответы: + + + – +

Тест 34. Сравнение отрезков

Следующие утверждения верны:

Пусть в треугольнике ABC точки K и M — середины сторон BA и BC соответственно, а P — точка пересечения медиан треугольника. Прямая, проходящая через точку P параллельно стороне AC, пересекает сторону BA в точке H, а сторону BC в точке T. Тогда имеют место такие отношения отрезков:

1) $AH : HK = 2 : 1$;
2) $PH : AC = 1 : 3$;
3) $HP : KM = 1 : 2$;
4) $AH : HB = 1 : 2$;
5) $BH : BK = 4 : 3$.

Ответы: + + – + +

Тест 35. Четырёхугольник

Следующие утверждения верны:

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC = 1$, $\angle A = \angle C = 90°$, $\angle D = 60°$. Тогда у этого четырёхугольника:

1) диагональ AD является биссектрисой углов A и D;
2) диагонали взаимно перпендикулярны;
3) площадь меньше 2;
4) середина диагонали AD равноудалена от вершин четырёхугольника;
5) середина диагонали AD равноудалена от сторон четырёхугольника $ABCD$.

Ответы: + + + + –

Тест 36. Равнобедренная трапеция

Следующие утверждения верны:

Пусть основания BC и AD равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 1 и 3. Тогда в этой трапеции:

1) если высота равна 1, то диагональ больше, чем 3;
2) если $AC > 3$, то $\angle A > 45^{\circ}$;
3) если $AB > 2$, то площадь больше 4;

4) если площадь равна 1, то $\angle A > 60°$;
5) если диагонали взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии.
Ответы: – + – + +

Тест 37. Прямоугольная трапеция
Следующие утверждения верны:
Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = BC = 1$, $AD = 2$, $\angle A = \angle B = 90°$. Тогда у этой трапеции:
1) наибольшей стороной является AD;
2) диагонали взаимно перпендикулярны;
3) площадь больше 1;
4) суммы длин противоположных сторон равны;
5) есть точка, равноудаленная от всех вершин трапеции.
Ответы: + – + – –

Тест 38. Средняя линия трапеции
Следующие утверждения верны:
Существует трапеция, в которой средняя линия:
1) перпендикулярна боковой стороне;
2) перпендикулярна одной из диагоналей;
3) равна одной из диагоналей;
4) равна полусумме боковых сторон;
5) проходит через точку пересечения диагоналей.
Ответы: + + + + –

Тест 39. Признаки равнобедренной трапеции
Следующие утверждения верны:
Трапеция является равнобедренной, если:
1) её диагонали равны;
2) равны проекции её диагоналей на основание;
3) её диагонали взаимно перпендикулярны;
4) каждая её диагональ перпендикулярна одной из боковых сторон;
5) существует точка, равноудаленная от всех вершин трапеции.
Ответы: + + – + +

Тест 40. Трапеция
Следующие утверждения верны:
Пусть в трапеции $ABCD$ её большее основание AD равно 6, а три другие её стороны равны друг другу и угол при большем основании не меньше, чем $60°$. Тогда у такой трапеции:
1) $AD < 3BC$;
2) периметр больше, чем 12;
3) площадь больше, чем 14;
4) диагональ больше, чем 6;

5) существует точка, равноудаленная от всех вершин трапеции.
Ответы: + + – – +

Тест 41.Свойства параллелограмма
Следующие утверждения верны:
У любого параллелограмма:
1) есть внутри него точка, равноудалённая от всех его вершин;
2) есть внутри него точка, равноудалённая от трёх его сторон;
3) самый большой отрезок с концами в его точках — его диагональ;
4) нет осей симметрии;
5) его диагонали разбивают его на равновеликие треугольники.
Ответы: – – + – +

Тест 42. Свойства параллелограмма
Следующие утверждения верны:
Если в параллелограмме одна сторона равна 1, а другая сторона равна a, то
1) при $a = 1$ параллелограмм имеет ось симметрии;
2) при $a > 1$ одна из его диагоналей меньше 2;
3) если площадь параллелограмма равна 1, то $a \geq 1$;
4) если тупой угол параллелограмма увеличивается, то площадь параллелограмма уменьшается;
5) при $a < 1$ каждая из его диагоналей меньше 2.
Ответы: + – + + +

Тест 43. Свойства параллелограмма
Следующие утверждения верны:
Пусть четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. Тогда:
1) если $AB = BC$, то AC и BD взаимно перпендикулярны;
2) если $AC = BD$, то $AB \perp BC$.
3) если $AB = BD$, то AC не перпендикулярно BD.
4) если $AC < BD$, то $\angle D < \angle A$.
5) если $AB > AD$, то $AC > BD$.
Ответы: + + – + –

Тест 44. Признаки параллелограмма

Следующие утверждения верны:

Четырёхугольник является параллелограммом, если:

1) две его стороны равны, а другие две — параллельны;
2) два его противоположных угла равны;
3) его диагонали равны и перпендикулярны;
4) у него есть центр симметрии;
5) если его диагональ делит его на два равных треугольника.

Ответы: – – – + –

Учебное издание

Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ
Методические рекомендации
8 класс

Учебное пособие для
общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Руководитель центра *М. Н. Бородин*
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*, *Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Боголомова*
Компьютерная графика *С. А. Крутикова*
Корректор *О. Н. Леонова*

ГЕОМЕТРИЯ

Примерная рабочая программа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа основного общего образования по геометрии составлена на основе Фундаментального ядра содержания общего образования и Требований к результатам освоения основной общеобразовательной программы основного общего образования, представленных в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования. В ней также учитываются основные идеи и положения Программы развития и формирования универсальных учебных действий для основного общего образования.

Овладение учащимися системой геометрических знаний и умений необходимо в повседневной жизни, для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Практическая значимость школьного курса геометрии обусловлена тем, что его объектом являются пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Геометрическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе.

Геометрия является одним из опорных предметов основной школы: она обеспечивает изучение других дисциплин. В первую очередь это относится к предметам естественно-научного цикла, в частности к физике. Развитие логического мышления учащихся при обучении геометрии способствует усвоению предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки геометрического характера необходимы для трудовой деятельности и профессиональной подготовки школьников.

Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении геометрических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, месте геометрии в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся, а также формированию качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности развитого воображения, геометрия развивает нравственные черты личности (настойчивость, целеустремлённость, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления) и умение аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения, а также способность принимать самостоятельные решения.

Геометрия существенно расширяет кругозор учащихся, знакомя их с индукцией и дедукцией, обобщением и конкретизацией, анализом и синтезом, классификацией и систематизацией, абстрагированием, аналогией. Активное использование задач на всех этапах учебного процесса развивает творческие способности школьников.

При обучении геометрии формируются умения и навыки умственного труда — планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическая оценка результатов. В процессе обучения геометрии школьники должны научиться излагать свои мысли ясно и исчерпывающе, лаконично и ёмко, приобрести навыки чёткого, аккуратного и грамотного выполнения математических записей.

Важнейшей задачей школьного курса геометрии является развитие логического мышления учащихся. Сами объекты геометрических умозаключений и принятые в геометрии правила их конструирования способствуют формированию умений обосновывать и доказывать суждения, приводить чёткие определения, развивают логическую интуицию, кратко и наглядно вскрывают механизм логических построений и учат их применению. Тем самым геометрия занимает ведущее место в формировании научно-теоретического мышления школьников. Раскрывая внутреннюю гармонию математики, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, способствуя восприятию геометрических форм, усвоению понятия симметрии, геометрия вносит значительный вклад в эстетическое воспитание учащихся. Её изучение развивает воображение школьников, существенно обогащает и развивает их пространственные представления.

Общая характеристика курса. В курсе условно можно выделить следующие содержательные линии: «Наглядная геометрия», «Геометрические фигуры», «Измерение геометрических величин», «Координаты», «Векторы», «Логика и множества», «Геометрия в историческом развитии».

Материал, относящийся к линии «Наглядная геометрия» (элементы наглядной стереометрии) способствует развитию пространственных представлений учащихся в рамках изучения планиметрии.

Содержание разделов «Геометрические фигуры» и «Измерение геометрических величин» нацелено на получение конкретных знаний о геометрической фигуре как важнейшей математической модели для описания окружающего мира. Систематическое изучение свойств геометрических фигур позволит развить логическое мышление и показать применение этих свойств при решении задач вычислительного и конструктивного характера, а также практических.

Материал, относящийся к содержательным линиям «Координаты» и «Векторы», в значительной степени несёт в себе межпредметные знания, которые находят применение как в различных математических дисциплинах, так и в смежных предметах.

Особенностью линии «Логика и множества» является то, что представленный здесь материал преимущественно изучается при рассмотрении различных вопросов курса. Соответствующий материал нацелен на математическое развитие учащихся, формирование у них умения точно, сжато и ясно излагать мысли в устной и письменной речи.

Линия «Геометрия в историческом развитии» предназначена для формирования представлений о геометрии как части человеческой культуры, для общего развития школьников, для создания культурно-исторической среды обучения.

Место предмета в учебном плане. Базисный учебный (образовательный) план на изучение геометрии в основной школе отводит 2 учебных часа в неделю в течение каждого года обучения, всего 210 уроков на базовом уровне и 3 часа в неделю на углублённом уровне, всего 305 уроков.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА ГЕОМЕТРИИ В 7—9 КЛАССАХ

Для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом (выделено *курсивом*) уровнях выпускник получит возможность научиться в 7—9 классах:

Геометрические фигуры

• Оперировать[1] понятиями геометрических фигур;

• извлекать, *интерпретировать и преобразовывать* информацию о геометрических фигурах, представленную на чертежах;

• применять для решения задач геометрические факты, если условия их применения заданы в явной форме; *а также предполагающих несколько шагов решения*;

• решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам;

• *формулировать свойства и признаки фигур*;

• *доказывать геометрические утверждения*;

• *владеть стандартной классификацией плоских фигур (треугольников и четырёхугольников).*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать свойства геометрических фигур для решения типовых задач, возникающих в ситуациях повседневной жизни, задач практического содержания;

---

[1] Здесь и далее на:
базовом уровне — распознавать конкретные примеры общих понятий по характерным признакам, выполнять действия в соответствии с определением и простейшими свойствами понятий, конкретизировать примерами общие понятия;
углублённом уровне — знать определение понятия, уметь пояснять его смысл, уметь использовать понятие и его свойства при проведении рассуждений, доказательств, решении задач.

• *использовать свойства геометрических фигур для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин.*

Отношения

• Оперировать понятиями: равенство фигур, равные фигуры, равенство треугольников, параллельность прямых, перпендикулярность прямых, углы между прямыми, перпендикуляр, наклонная, проекция, *подобие фигур, подобные фигуры, подобные треугольники*;

• *применять теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках при решении задач*;

• *характеризовать взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать отношения для решения задач, возникающих в реальной жизни.

Измерения и вычисления

• Выполнять измерение длин, расстояний, величин углов с помощью инструментов для измерений длин и углов;

• применять формулы периметра, площади и объёма, площади поверхности отдельных многогранников при вычислениях, когда все данные имеются в условии;

• применять теорему Пифагора, базовые тригонометрические соотношения для вычисления длин, расстояний, площадей в простейших случаях;

• *оперировать представлениями о длине, площади, объёме как о величинах*;

• *применять теорему Пифагора, формулы площади, объёма при решении многошаговых задач, в которых не все данные представлены явно и которые требуют вычислений, оперировать более широким количеством формул длины, площади, объёма, вычислять характеристики комбинаций фигур (окружностей и многоугольников), вычислять расстояния между фигурами, применять тригонометрические формулы для вычислений в более сложных случаях, проводить вычисления на основе равновеликости и равносоставленности*;

• *проводить простые вычисления на объёмных телах*;

• *формулировать задачи на вычисление длин, площадей и объёмов и решать их.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• вычислять расстояния на местности в стандартных ситуациях, применять формулы и вычислять площади в простых случаях;

• *проводить вычисления на местности, применять формулы при вычислениях в смежных учебных предметах, в окружающей действительности.*

Геометрические построения

• Изображать типовые плоские фигуры и фигуры в пространстве от руки и с помощью инструментов;

• *изображать геометрические фигуры по текстовому и символьному описанию*;

• *свободно оперировать чертёжными инструментами в несложных случаях*;

• *выполнять построения треугольников, применять отдельные методы построений циркулем и линейкой и проводить простейшие исследования числа решений*;

• *изображать типовые плоские фигуры и объёмные тела с помощью простейших компьютерных инструментов.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• выполнять простейшие построения на местности, необходимые в реальной жизни;

• оценивать размеры реальных объектов окружающего мира.

Преобразования

• Строить фигуру, симметричную данной фигуре относительно оси и точки;

• *оперировать понятием движения и преобразования подобия, владеть приёмами построения фигур с использованием движений и преобразований подобия, применять полученные знания и опыт построений в смежных предметах и в реальных ситуациях окружающего мира*;

• *строить фигуру, подобную данной, пользоваться свойствами подобия для обоснования свойств фигур*;

• *применять свойства движений для проведения простейших обоснований свойств фигур.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• распознавать движение объектов в окружающем мире;

• распознавать симметричные фигуры в окружающем мире;

• *применять свойства движений и применять подобие для построений и вычислений.*

Векторы и координаты на плоскости

• Оперировать понятиями: вектор, сумма векторов, *разность векторов*, произведение вектора на число, *угол между векторами, скалярное произведение векторов,* координаты на плоскости, *координаты вектора*;

• определять приближённо координаты точки по её изображению на координатной плоскости;

• выполнять действия над векторами (сложение, *вычитание*, умножение на число), *вычислять скалярное произведение, определять в простейших случаях угол между векторами, выполнять разложение вектора на составляющие, применять полученные знания в физике, пользоваться формулой вычисления расстояния между точками по известным координатам, использовать уравнения фигур для решения задач*;

• *применять векторы и координаты для решения геометрических задач на вычисление длин, углов.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать векторы для решения простейших задач на определение скорости относительного движения;

• *использовать понятия векторов и координат для решения задач по физике, географии и другим учебным предметам.*

История математики

• Описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

• знать примеры математических открытий и их авторов в связи с отечественной и всемирной историей;

• понимать роль математики в развитии России;

• *характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей.*

Методы математики

• Выбирать подходящий изученный метод для решении изученных типов математических задач;

• приводить примеры математических закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства;

• *используя изученные методы, проводить доказательство, выполнять опровержение*;

• *выбирать изученные методы и их комбинации для решения математических задач*;

• *использовать математические знания для описания закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства*;

• *применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач.*

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ В 7—9 КЛАССАХ

(Содержание, выделенное *курсивом*, изучается на углублённом уровне)

Геометрические фигуры

Фигуры в геометрии и в окружающем мире. Геометрическая фигура. Формирование представлений о метапредметном понятии «фигура». Точка, линия, отрезок, прямая, луч, ломаная, плоскость, угол. Биссектриса угла и её свойства, виды углов, многоугольники, круг.

Осевая симметрия геометрических фигур. Центральная симметрия геометрических фигур.

Многоугольники. Многоугольник, его элементы и его свойства. Распознавание некоторых многоугольников. *Выпуклые и невыпуклые многоугольники*. Правильные многоугольники.

Треугольники. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника. Равнобедренный треугольник, его свойства и признаки. Равносторонний треугольник. Прямоугольный, остроугольный, тупоугольный треугольники. Внешние углы треугольника. Неравенство треугольника.

Четырёхугольники. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция, равнобедренная трапеция. Свойства и признаки параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата.

Окружность, круг. Окружность, круг, их элементы и свойства; центральные и вписанные углы. Касательная и *секущая* к окружности, *их свойства*. Вписанные и описанные окружности для треугольников, *четырёхугольников*, *правильных многоугольников*.

Геометрические фигуры в пространстве (объёмные тела). *Многогранник и его элементы. Названия многогранников с разным положением и количеством граней*. Первичные представления о пирамиде, параллелепипеде, призме, сфере, шаре, цилиндре, конусе, их элементах и простейших свойствах.

Отношения

Равенство фигур. Свойства равных треугольников. Признаки равенства треугольников.

Параллельность прямых. Признаки и свойства параллельных прямых. *Аксиома параллельности Евклида. Теорема Фалеса.*

Перпендикулярные прямые. Прямой угол. Перпендикуляр к прямой. Наклонная, проекция. Серединный перпендикуляр к отрезку. *Свойства и признаки перпендикулярности.*

Подобие. *Пропорциональные отрезки, подобие фигур. Подобные треугольники. Признаки подобия.*

Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.

Измерения и вычисления

Величины. Понятие величины. Длина. Измерение длины. Единицы измерения длины. Величина угла. Градусная мера угла. Понятие о площади плоской фигуры и её свойствах. Измерение площадей. Единицы измерения площади. Представление об объёме и его свойствах. Измерение объёма. Единицы измерения объёмов.

Измерения и вычисления. Инструменты для измерений и построений; измерение и вычисление углов, длин (расстояний), площадей. Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике *Тригонометрические функции тупого угла*. Вычисление элементов треугольников с использованием тригонометрических соотношений. Формулы площади треугольника, параллелограмма и его частных видов, формулы длины окружности и площади круга. Сравнение и вычисление площадей. Теорема Пифагора. *Теорема синусов. Теорема косинусов.*

Расстояния. Расстояние между точками. Расстояние от точки до прямой. *Расстояние между фигурами.*

Геометрические построения. Геометрические построения для иллюстрации свойств геометрических фигур. Инструменты для построений: циркуль, линейка, угольник. *Простейшие построения циркулем и линейкой: построение биссектрисы угла, перпендикуляра к прямой, угла, равного данному. Построение треугольников по трём сторонам, двум сторо-*

нам и углу между ними, стороне и двум прилежащим к ней углам. Деление отрезка в данном отношении.

Геометрические преобразования

Преобразования. Понятие преобразования. Представление о метапредметном понятии «преобразование». *Подобие.*

Движения. Осевая и центральная симметрия, *поворот и параллельный перенос. Комбинации движений на плоскости и их свойства.*

Векторы и координаты на плоскости

Векторы. Понятие вектора, действия над векторами, использование векторов в физике, *разложение вектора на составляющие, скалярное произведение.*

Координаты. Основные понятия, *координаты вектора, расстояние между точками. Координаты середины отрезка. Уравнения фигур. Применение векторов и координат для решения простейших геометрических задач.*

История математики

Возникновение математики как науки, этапы её развития. Основные разделы математики. Выдающиеся математики и их вклад в развитие науки. Бесконечность множества простых чисел. Числа и длины отрезков. Рациональные числа. Потребность в иррациональных числах. Школа Пифагора.

Зарождение алгебры в недрах арифметики. Ал-Хорезми. Рождение буквенной символики. П. Ферма, Ф. Виет, Р. Декарт. История вопроса о нахождении формул корней алгебраических уравнений степеней, больших четырёх. Н. Тарталья, Дж. Кардано, Н. Х. Абель, Э. Галуа.

Появление метода координат, позволяющего переводить геометрические объекты на язык алгебры. Появление графиков функций. Р. Декарт, П. Ферма. Примеры различных систем координат.

Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) о кроликах, числа Фибоначчи. Задача о шахматной доске. Сходимость геометрической прогрессии. Истоки теории вероятностей: страховое дело, азартные игры. П. Ферма, Б. Паскаль, Я. Бернулли, А. Н. Колмогоров.

От земледелия к геометрии. Пифагор и его школа. Фалес, Архимед. Платон и Аристотель. Построение правильных многоугольников. Трисекция угла. Квадратура круга. Удвоение куба. История числа π. Золотое сечение. «Начала» Евклида. Л. Эйлер, Н. И. Лобачевский. История пятого постулата.

Геометрия и искусство. Геометрические закономерности окружающего мира. Астрономия и геометрия. Что и как узнали Анаксагор, Эратосфен и Аристарх о размерах Луны, Земли и Солнца. Расстояния от Земли до Луны и Солнца. Измерение расстояния от Земли до Марса.

Роль российских учёных в развитии математики: Л. Эйлер. Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышев, С. В. Ковалевская, А. Н. Колмогоров. Математика в развитии России: Пётр I, школа математических и навигацких наук, развитие российского флота, А. Н. Крылов. Космическая программа и М. В. Келдыш.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала по учебно-методическому комплекту, не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания по геометрии разбиты на темы в хронологии их изучения по соответствующим учебникам.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нём содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, на организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим воззрениям, на использование современных технологий.

А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот «Геометрия, 7», «Геометрия, 8», «Геометрия, 9»

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
7 класс			
Введение. Что такое геометрия		**3**	
1, 2	Как возникла и что изучает геометрия. О задачах геометрии	1	Читать и понимать прочитанное: понять, что геометрия возникла из практики, что геометрические фигуры — это мысленные образы реальных предметов. Познакомиться с задачами геометрии и с важнейшей из этих задач — построением фигур с заданными свойствами
3, 4, 5	Плоские и пространственные фигуры. Плоскость, прямая, точка	1	Вспомнить уже известные геометрические фигуры: плоские (отрезок, прямоугольник, треугольник, квадрат, круг) и пространственные (простейшие многогранники и шар). Изображать эти фигуры, их объединение и пересечение в простейших случаях. Называть элементы многогранников. Понимать идеальный характер понятий *точка, прямая, плоскость*
6	Об истории геометрии. Евклид и его «Начала». Постулаты и аксиомы. Их роль в логическом построении геометрии. Значение геометрии	1	Узнать, как от опытной геометрии в Древнем Египте перешли к логической геометрии в Древней Греции, о роли Евклида и его «Начал». Приводить примеры постулатов и аксиом Евклида. Понимать значение геометрии в человеческой культуре

Глава I. Начала геометрии		**25**	
1.1	Отрезок. Концы отрезка и его внутренние точки. Тетраэдр	1	Приводить примеры реальных отрезков. Выполнять простейшие операции с отрезками: соединять отрезком две точки, разбивать отрезок на два внутренней точкой, продолжать отрезок за его концы. Строить конструкции из отрезков и приводить примеры таких конструкций
1.2	Лучи (полупрямые) и прямые. Полуплоскость	1	Определять луч (полупрямую) неограниченным продолжением отрезка за один из его концов, а прямую неограниченным продолжением отрезка за оба конца. Знать, что через каждые две точки проходит прямая и притом только одна. Определять пересекающиеся прямые. Знать о разбиении прямой на полупрямые, плоскости на полуплоскости, пространства на полупространства
1.3	Сравнение отрезков: их равенство и неравенство. Аксиома откладывания отрезка	1	Иллюстрировать сравнение реальных отрезков их наложением. Понятие равенства отрезков — основное. Формулировать две аксиомы о равенстве отрезков — аксиому сравнения и аксиому откладывания. Знать, что при изображении пространственных фигур равные отрезки могут изображаться неравными отрезками (например, рёбра куба). Знать определение равностороннего треугольника
1.4	Действия с отрезками	1	Выполнять (построением) сложение и вычитание отрезков, умножение отрезка на натуральное число. Знать о возможности деления отрезка на равные части
1.5	Длина отрезка. Измерение длины отрезка. Расстояние между точками	1	Знать два основных свойства длины отрезка: длины равных отрезков равны и при сложении отрезков их длины складываются. Знать, как в результате измерения отрезка

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
			появляется численное значение длины при выбранном единичном отрезке. Уметь изменить численное значение длины отрезка при замене единичного отрезка. Знать, что арифметические действия с численными значениями длин отрезков аналогичны действиям с самими отрезками. Знать о метрической системе длин
1.6	Понятие о равенстве фигур. Равенство треугольников	1	Судить о равенстве двух реальных предметов, измеряя расстояния между их соответствующими точками. Определять равенство двух треугольников равенством их соответствующих сторон. Аргументировать, почему дано такое определение, и применять его
	Решение задач по теме «Отрезки»	1	Решать задачи о построении отрезков по заданным условиям, задачи о вычислении длин (в частности, о вычислении периметров), представлять возможные ситуации в расположении отрезков, лучей и прямых и оценивать число таких ситуаций, решать задачи прикладного характера
2.1	Определения окружности и круга. Равные и концентрические окружности	1	Формулировать определения окружности и круга, равных и концентрических окружностей. Строить треугольник, равный данному треугольнику
2.2	Части окружности и круга: дуга, диаметр, хорда, сегмент, сектор. Хорда фигуры	1	Формулировать определения различных частей окружности и круга. Представлять возможные ситуации при объединении и пересечении разных частей круга

2.3	Центральная симметрия	1	Уметь объяснить, что значит: 1) две фигуры взаимно симметричны относительно некоторой точки; 2) некоторая фигура имеет центр симметрии. Приводить примеры фигур, имеющих центр симметрии, и изображать их
2.4	Построения циркулем и линейкой	1	Строить треугольник по трём сторонам. Понимать, что не для любых исходных данных задача на построение имеет решение. Понимать, что значит в геометрии единственность решения задачи на построение. Знать, что не любая задача на построение циркулем и линейкой разрешима этими инструментами, например задача об удвоении куба
2.5, 2.6	Как определяют сферу и шар. Сферическая геометрия	1	Если в 7—9 классах совсем не рассматривать стереометрический материал, то все элементы стереометрии, которые были изучены в «Наглядной геометрии» в 5—6 классах, будут забыты. Поэтому по аналогии с окружностью и кругом рассматриваются сфера и шар и даются наглядные представления о сферической геометрии
	Контрольная работа № 1	1	Ученики письменно решают задачи по темам «Отрезки» и «Окружность и круг»
3.1	Угол, вершина угла, стороны угла. Развёрнутый угол. Смежные углы. Выпуклый и невыпуклый углы	1	Формулировать определения понятий: угол, развёрнутый угол, выпуклый угол, невыпуклый угол, смежные углы, хорда угла. Изображать их и указывать на рисунках
3.2	Равенство углов. Аксиома о свойстве равных углов	1	Определять равенство двух углов как углов, которые имеют равные соответственные хорды. Аргументировать аксиому о свойстве равных углов. Выводить из неё

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
			утверждение о том, что соответственные хорды отсекают от равных углов равные треугольники. Видеть и указывать на рисунках равные углы
3.3	Откладывание угла. Аксиома откладывания угла. Построение угла, равного данному углу	1	Объяснять, что значит отложить угол от данного луча, формулировать аксиому откладывания угла. Строить угол, равный данному углу, циркулем и линейкой. Доказывать, что построенный угол — искомый
3.4	Сравнение углов. Прямой угол. Острый и тупой углы. Биссектриса угла	1	Уметь объяснять, как сравнить два угла. Формулировать определения понятий: прямой угол, острый угол, тупой угол, биссектриса угла. Сопоставлять на рисунках равные углы и равные отрезки. Доказывать равенство диагоналей квадрата и равенство диагоналей граней куба
3.5	Построение биссектрисы угла. Построение прямого угла	1	Строить циркулем и линейкой биссектрису данного угла (в частности, биссектрису развёрнутого угла). Давать доказательство выполненного построения. Делить пополам данный отрезок (циркулем и линейкой)
3.6	Вертикальные углы. Взаимно перпендикулярные прямые	1	Формулировать определение вертикальных углов и доказывать их свойство. Объяснять, какие прямые называют перпендикулярными

3.7	Действия с углами	1	Уметь складывать и вычитать углы, умножать их на натуральные числа, делить пополам. Знать о неразрешимости циркулем и линейкой задачи трисекции угла
3.8	Измерение углов. Градусная мера угла	1	Уметь рассказать о процессе измерения углов и об аналогии его процессу измерения отрезков. Знать о градусной мере углов
	Решение задач	2	Решать задачи на построение отрезков, углов и треугольников, задачи на доказательство, о равенстве отрезков, углов и треугольников, вычислительные задачи о мере угла
	Контрольная работа № 2	1	Письменная контрольная работа по теме «Углы»
3.9	Двугранный угол	1	Рассказать о том, как измеряется угол между пересекающимися плоскостями
Глава II. Треугольники		**20**	
4.1	О теоремах	1	Те утверждения, которые доказывают, называются теоремами. В главе I уже доказан ряд теорем (в частности, каждая из задач на доказательство — это теорема). Стоит вспомнить эти результаты главы I
4.2	Элементы треугольника	1	Находить и указывать в треугольнике прилежащие и противолежащие стороны и углы. Формулировать определение медианы треугольника
4.3	Первый признак равенства треугольников	1	Применить аксиому о свойстве равных углов и получить первый признак равенства треугольников. Понять структуру формулировки теоремы и дать аналогичные формулировки для некоторых доказанных ранее утверждений

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
4.4	Равенство соответственных углов равных треугольников	1	Выводить теорему о равенстве соответственных углов равных треугольников из определения равных углов. Судить о равенстве углов из равенства отрезков
	Решение задач	1	Применяя первый признак равенства треугольников и теорему 2 о равенстве углов, решать задачи на доказательство к пунктам 4.3, 4.4 главы II
4.5	Теорема о внешнем угле треугольника	1	Доказать теорему о внешнем угле треугольника
	Классификация треугольников	1	Провести классификацию треугольников по углам. Катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника
4.6	Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра	1	Формулировать определение перпендикуляра, проведённого из данной точки вне прямой к этой прямой, и доказывать его единственность. Вывести из этого утверждения признак параллельности прямых, перпендикулярных одной прямой
4.7	Доказательство способом от противного. Второй признак равенства треугольников	1	Знать, в чём состоит способ доказательства от противного, и уметь его применять. Доказывать этим способом второй признак равенства треугольников
4.8	Высота треугольника	1	Формулировать определение высоты треугольника, знать, как расположены высоты в остроугольном, прямоугольном и тупоугольном треугольниках

5.1	Равнобедренный треугольник и его свойства	1	Называть элементы равнобедренного треугольника, доказывать его свойства
5.2	Серединный перпендикуляр	1	Формулировать определение серединного перпендикуляра, доказывать теоремы о его свойстве и признаке. Строить циркулем и линейкой серединный перпендикуляр данного отрезка и опускать на прямую перпендикуляр из точки вне прямой
5.3	Взаимно обратные утверждения. Равносильные утверждения	1	Знать о структуре взаимно обратных утверждений. Уметь формулировать утверждение, обратное данному. Понимать применимость словесного оборота «тогда и только тогда» и знать о равносильных утверждениях. Приводить примеры равносильных и неравносильных взаимно обратных утверждений
5.4	Сравнение сторон и углов треугольника. Признак равнобедренного треугольника	1	Уметь доказать теорему о том, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а также и обратное утверждение. Выводить следствия этой теоремы: признак равнобедренного треугольника; катет короче гипотенузы; углы, прилежащие к большей стороне треугольника, острые; высота на бóльшую сторону треугольника лежит внутри его
	Решение задач	2	Решать планиметрические задачи к главе II на вычисление, доказательство и исследование
	Контрольная работа № 3	1	Письменная контрольная работа по главе II
5.5	Осевая симметрия	1	Объяснять, что значит две точки (две фигуры) симметричны относительно прямой и что значит фигура имеет ось симметрии. Приводить примеры фигур, обладающих осевой симметрией

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
	Оси симметрии угла, равнобедренного треугольника, окружности, круга	1	Доказать, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии, что равнобедренный треугольник имеет ось симметрии, что любая прямая, проходящая через центр окружности (круга) является её (его) осью симметрии
	Решение стереометрических задач	1	Решать задачи 5.20, II.1, II.16, II.17, II.18
Глава III. Расстояния и параллельность		**16**	
6.1	Понятие о расстоянии. Расстояние от точки до фигуры. Расстояние от точки до прямой	1	Объяснять, как находится расстояние от точки до фигуры (в частности, расстояние от точки до прямой), а также расстояние между фигурами. Приводить примеры из практики. Используя факт, что перпендикуляр короче наклонной, определить перпендикуляр, опущенный из заданной точки *A* на плоскость, как кратчайший отрезок, соединяющий точку *A* с точками этой плоскости. Это позволяет определить высоту пирамиды
6.2	Неравенство треугольника	1	Доказать, что сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Отсюда следует условие разрешимости задачи о построении треугольника по трём сторонам

	Решение задач	1	Решать задачи рубрики «Ищем границы» к § 6 и главе III
7.1	Признаки параллельности прямых	1	Знать, как называются пары углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой, и указывать их на рисунках. Из теоремы о внешнем угле треугольника получить как следствие признаки параллельности прямых
7.2	Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности	1	Знать, что пятый постулат Евклида даёт условия разрешимости задачи о построении треугольника по стороне и двум прилегающим к ней углам и является признаком непараллельности прямых. Формулировать аксиому параллельности прямых и установить, что она равносильна пятому постулату Евклида
7.3	Проблема пятого постулата и неевклидова геометрия	1	Знать о проблеме пятого постулата и её решении в первой половине XIX в. Н. И. Лобачевским — создателем неевклидовой геометрии
7.4	Свойства углов, образованных параллельными и секущей	1	Способом от противного доказывать свойства углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей
7.5	Построение прямоугольника	1	Построить прямоугольник с заданными измерениями. Определить равенство двух прямоугольников равенством их измерений. Формулировать признак прямоугольника: четырёхугольник с тремя прямыми углами является прямоугольником
7.6	Полоса	1	Полосой называется часть плоскости между параллельными прямыми. Расстояние между этими прямыми — ширина полосы. Это длина их общего перпендикуляра

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
8.1	Теорема о сумме углов треугольника	1	Формулировать и доказывать теорему о сумме углов треугольника
8.2	Следствия из теоремы о сумме углов треугольника	1	Выводить следствия из теоремы о сумме углов треугольника: 1) о сумме острых углов прямоугольного треугольника; 2) о внешнем угле треугольника; 3) об угле равнобедренного прямоугольного треугольника
	Решение задач	1	Решать задачи к § 7, 8 главы III
	Контрольная работа № 4	1	Письменная контрольная работа по главе III
1 (дополнение)	Аксиома прямоугольника	1	Можно заменить аксиому параллельности на аксиому о том, что можно построить прямоугольник с данными измерениями
2 (дополнение)	Сумма углов прямоугольного треугольника — следствие аксиомы прямоугольника	1	Из аксиомы прямоугольника выводится утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°
3 (дополнение)	Единственность параллельной прямой — следствие аксиомы прямоугольника	1	Опираясь на аксиому прямоугольника, можно доказать единственность прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую. В сильном классе можно дать второй вариант изложения темы о параллельности
	Резерв — 6 часов		

8 класс			
Введение. Повторение		**4**	
1	Треугольники	2	Вспомнить, что равенство двух треугольников можно установить по соответственным равенствам: 1) трёх пар сторон; 2) двух пар сторон и углов между ними; 3) паре сторон и прилежащим к ним углам. Повторить свойства и признаки равнобедренного треугольника и взаимно обратные теоремы о серединном перпендикуляре. Вспомнить теоремы о сравнении сторон и углов треугольника и теорему о сумме углов треугольника. Из задач к п. 1 особое внимание уделить задачам рубрики «Дополняем теорию»
2	Параллельность	1	Вспомнить названия углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой, повторить признаки параллельности прямых и свойства соответственных, накрест лежащих и односторонних углов при параллельных прямых, пересечённых третьей прямой
3	Множество (геометрическое место) точек	1	Объяснять, что такое геометрическое место точек. Приводить примеры геометрических мест точек
Глава I. Площади многоугольных фигур		**30**	
1.1	Ломаные и многоугольники	1	Распознавать ломаные и многоугольники, формулировать определения многоугольника и его элементов, приводить примеры многоугольников

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
1.2	Выпуклые и невыпуклые многоугольники	1	Распознавать выпуклые и невыпуклые многоугольники, формулировать их определения. Формулировать и доказывать теорему о сумме углов выпуклого многоугольника
1.3	Четырёхугольники	1	Распознавать выпуклые и невыпуклые четырёхугольники, доказывать теорему о сумме углов любого четырёхугольника
1.4	Правильные многоугольники	2	Строить правильные многоугольники из равнобедренных треугольников. Формулировать определение правильного многоугольника. Доказывать теорему о центре правильного многоугольника. Ознакомиться с историей задачи на построение правильного многоугольника циркулем и линейкой
1.5	Многоугольные фигуры	1	Формулировать определение многоугольной фигуры, приводить примеры таких фигур, разбивать многоугольную фигуру на многоугольные фигуры и составлять многоугольные фигуры из многоугольных фигур
1.6	Многогранники. Пирамиды	1	Формулировать определение многогранника. Конструировать пирамиду. Называть элементы пирамиды. Формулировать определения правильной пирамиды и правильного тетраэдра. Распознавать пирамиды на изображениях и изображать их при решении задач

2.1	Понятие площади. Измерение площади	1	Формулировать определение площади многоугольной фигуры. Объяснять и иллюстрировать понятия равновеликих и равносоставленных фигур. Объяснять, в чём состоит измерение площади и как получается численное значение площади
2.2	Площадь прямоугольника	1	Выводить формулу площади прямоугольника и решать задачи с использованием этой формулы
3.1	Теорема Пифагора	2	Формулировать и доказывать теорему Пифагора и теорему, обратную теореме Пифагора. Ознакомиться с разными доказательствами теоремы Пифагора
3.2 3.3	Пифагор Равносоставленные фигуры	1	Прочитать сведения о личности Пифагора и его роли в развитии культуры. Объяснять и иллюстрировать понятия равновеликих и равносоставленных фигур
3.4	Вычисление длин. Квадратный корень	1	Находить квадратный корень положительного числа. Вычислять длины сторон прямоугольных треугольников по теореме Пифагора
3.5	Наклонные и проекции	1	Ввести понятия наклонной к прямой и её проекции на прямую и сформулировать теорему Пифагора в терминах проекций
4.1	Площадь треугольника	2	Вывести формулу для площади треугольника и решать задачи на применение этой формулы
4.2	Формула Герона	1	Вывести формулу Герона и решать задачи на применение этой формулы

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
4.3	Трапеция	1	Распознавать, формулировать определения и изображать трапецию, равнобедренную и прямоугольную трапеции, доказывать, решая задачи, их свойства и признаки
	Площадь трапеции	1	Вывести формулу для площади трапеции и решать задачи с применением этой формулы
	Контрольная работа № 1	1	Решать задачи на теорему Пифагора, формулы для площадей треугольника и трапеции
5.1	Параллелограмм. Свойства параллелограмма	2	Распознавать, формулировать определение и изображать параллелограмм. Формулировать и доказывать теорему о свойствах параллелограмма. Решать задачи о свойствах параллелограмма
5.2	Признаки параллелограмма	2	Формулировать и доказывать четыре признака параллелограмма. Решать задачи на применение этих признаков
5.3	Прямоугольник, ромб, квадрат как частный случай параллелограмма	2	Доказывать теорему о том, что параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда диагонали его равны. Формулировать и доказывать утверждения о свойствах ромба. Решать задачи о прямоугольнике и ромбе
5.4	Площадь параллелограмма	2	Выводить формулу площади параллелограмма и применять её при решении задач

5.5	Параллелепипед. Призмы	1	Формулировать определения параллелепипеда и его элементов. Разбивать параллелепипед на две треугольные призмы. Конструировать из треугольных призм n-угольные призмы. Формулировать определения прямых и правильных призм. Изображать параллелепипеды и призмы. Приводить примеры правильных призм и правильных пирамид в архитектуре
	Контрольная работа № 2	1	Контрольная работа по теме «Параллелограмм»
Глава II. Геометрия треугольника		**29**	
6.1	Теорема об отношении перпендикуляра и наклонной	1	Находить отношение отрезков, зная их длины. Доказывать теорему об отношении перпендикуляра и наклонной
6.2	Определение синуса	1	Формулировать определение синуса любого выпуклого угла. Доказывать равенство синусов равных углов и смежных углов. Вычислять синусы углов заданной градусной меры и синусы углов простых многоугольников
6.3	Свойства синуса и его график	1	Объяснять изменение синуса угла при возрастании меры угла от 0 до 180°. Строить углы, синусы которых заданы, и находить величины этих углов
6.4	Решение прямоугольных треугольников	1	Выражать синус острого угла прямоугольного треугольника как отношение противолежащего ему катета к гипотенузе. Решать прямоугольные треугольники, используя синус
6.5	Вычисление площади треугольника	1	Выводить формулу $S = 0{,}5bc\sin A$ и применять её при решении задач

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
6.6	Теорема синусов	1	Доказывать теорему синусов. Решать треугольники по стороне и двум углам. Рассмотреть практические задачи на применение теоремы синусов
	Решение задач	1	Решать задачи по теме «Синус»
7.1	Определение косинуса	1	Формулировать определение косинуса для любого выпуклого угла. Установить зависимость косинусов смежных углов. Строить углы, косинусы которых заданы. Вычислять косинусы углов простых многоугольников
7.2	Основное тригонометрическое тождество	1	Выводить, опираясь на теорему Пифагора, основное тригонометрическое тождество. Знать, что для прямоугольного треугольника с единичной гипотенузой основное тригонометрическое тождество — это теорема Пифагора. Вычислять косинусы углов, градусные меры которых известны, и находить величины углов по их косинусам
7.3	Косинусы острых углов прямоугольного треугольника	1	Выражать косинус острого угла прямоугольного треугольника как отношение прилежащего к нему катета к гипотенузе. Решать прямоугольные треугольники, применяя косинус
7.4	Свойства косинуса и его график	1	Объяснять убывание косинуса от 1 до –1 при возрастании угла от 0 до 180° и единственность выпуклого угла, имеющего данный косинус

7.5	Теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора)	1	Доказывать теорему косинусов и применять её при решении треугольников. Определять вид треугольника по длинам его сторон
7.6 7.7	Средние линии треугольника и трапеции Применения косинуса в практике	2	Вывести из теоремы косинусов теорему о средней линии треугольника, а затем, применяя эту теорему, доказать теорему о средней линии трапеции. Решать задачи по теме «Косинус»
	Контрольная работа № 3	1	Контрольная работа по § 6, 7
8.1	Тангенс	1	Определять тангенс непрямого угла как отношение синуса этого угла к его косинусу. Выражать тангенс острого угла прямоугольного треугольника как отношение его катетов. Объяснять изменение тангенса угла при возрастании величины угла от 0 до 180°. Решать задачи с применением тангенса
8.2	Котангенс	1	Определять котангенс угла как отношение косинуса этого угла к его синусу. Выражать котангенс острого угла прямоугольного треугольника как отношение его катетов. Объяснять убывание котангенса в интервале (0°, 180°). Решать задачи с применением котангенса
8.3	Из истории тригонометрии	1	Ознакомиться с историей тригонометрии
9.1	Определение подобных треугольников	1	Формулировать определение подобных треугольников. Знать, что равенство треугольников — это частный случай их подобия. Доказывать подобие частных видов треугольников, используя определение подобия треугольников. Приводить примеры подобных фигур

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
9.2	Признаки подобия треугольников	1	Доказывать, опираясь на теоремы косинусов и синусов, два признака подобия треугольников. Решать задачи на эти признаки
9.3	Свойства подобных треугольников	1	Выводить, используя тригонометрию, свойства подобных треугольников: равенство соответствующих углов, отношение площадей. Решать задачи
10.1	Подобие треугольников и параллельность. Теорема Фалеса	1	Доказывать теорему о параллельных прямых, пересекающих сторону угла, частным случаем которой является теорема Фалеса. Решать задачи
10.2	Фалес	1	Прочитать о личности Фалеса и его роли в развитии культуры
10.3	Применения подобия при решении задач на построение	1	Решать задачи о делении отрезка на равные части, о построении четвёртого пропорционального. Применять метод подобия при решении задач на построение
10.4, 10.5	Построение среднего геометрического. Пентаграмма и золотое сечение	2	Строить циркулем и линейкой среднее геометрическое двух отрезков и делить отрезок в крайнем и среднем отношении. Строить циркулем и линейкой правильный пятиугольник и пентаграмму. Ознакомиться с их свойствами и с их применениями в архитектуре

10.6	Точка пересечения медиан треугольника	1	Доказывать теорему о точке пересечения медиан треугольника. Решать задачи
	Решение задач	1	Решать задачи по теме «Подобие треугольников»
	Контрольная работа № 4	1	Контрольная работа по теме «Подобие треугольников»
	Резерв — 7 часов		
	9 класс		
Глава I. Векторы и координаты		**20**	
1.1	Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки	1	Формулировать определения и иллюстрировать понятия направленного отрезка, вектора, модуля (длины) вектора, коллинеарных и ортогональных векторов
1.2	Сонаправленность векторов	1	Формулировать определения сонаправленных и противоположно направленных векторов, доказывать признак сонаправленности векторов
1.3	Равенство векторов	1	Формулировать определение равных векторов и доказывать признаки равенства векторов
1.4, 1.5	О понятии вектора. Нуль-вектор. Угол между векторами	1	Формулировать определение угла между ненулевыми векторами и доказывать теорему о равенстве углов с сонаправленными сторонами
2.1, 2.2	Сложение векторов. Свойства сложения векторов	1	Выполнять сложение векторов по правилу треугольника и по правилу параллелограмма. Доказывать свойства сложения векторов

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
2.3	Вычитание векторов. Противоположные векторы	1	Выполнять вычитание векторов. Формулировать определение противоположных векторов
3.1, 3.2	Умножение вектора на число. Распределительные законы умножения векторов на число	1	Выполнять операцию умножения вектора на число и доказывать её свойства
4.1, 4.2	Векторный метод. Об истории теории векторов	1	Применять векторный метод при решении задач
5.1	Векторы на координатной оси	1	Вычислять координаты векторов на координатной оси и выполнять действия с ними
5.2	Векторы на координатной плоскости	1	Раскладывать векторы на составляющие по осям координат и вычислять координаты векторов
	Длина вектора, расстояние между точками, координаты середины отрезка	1	Вычислять длины векторов по их координатам, вычислять расстояния между точками, зная их координаты, находить координаты середины отрезка
5.3	Действия с векторами в координатной форме	1	Выполнять действия с векторами, заданными своими координатами
5.4	Метод координат. Уравнения окружности и прямой	2	Рисовать фигуры, заданные уравнениями и неравенствами. Выводить уравнения фигур

6.1	Косинус	1	Формулировать определение косинуса и основное тригонометрическое тождество, доказывать теорему косинусов
6.2	Скалярное произведение векторов	2	Формулировать определение скалярного произведения векторов, выражать его через координаты векторов, выводить из этой формулы свойства скалярного умножения, применять скалярное умножение при вычислении длин и углов
	Решение задач	2	Решать задачи по теме «Векторы и координаты»
	Контрольная работа № 1	1	Контрольная работа по теме «Векторы и координаты»
Глава II. Преобразования		**23**	
7.1	Понятие преобразования	1	Формулировать определения следующих понятий: преобразование фигуры, образ точки, образ фигуры, прообраз точки. Приводить примеры преобразований
7.2	Важные примеры преобразований	1	Формулировать определения центральной, осевой и зеркальной симметрий, параллельного переноса (короче — переноса), гомотетии. Изображать образы фигур при этих преобразованиях
7.3	Взаимно обратные преобразования	1	Формулировать определения взаимно однозначного преобразования и обратного ему преобразования. Строить преобразования, обратные симметриям, переносам и гомотетиям
7.4	Композиция преобразований	1	Формулировать определение композиции преобразований и строить композиции простейших преобразований

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
8.1	Определение и простейшие свойства движений	1	Формулировать определение движения фигуры, доказывать простейшие общие свойства движений, прочитать о связи геометрических и реальных движений
8.2	Свойства фигур, сохраняющиеся при движении	1	Формулировать свойства фигур, сохраняющиеся при движениях
8.3	Параллельный перенос	1	Доказывать характерное свойство переноса: перенос является движением, сохраняющим направления. Изображать фигуры, полученные переносом
8.4	Центральная симметрия	1	Доказывать, что центральная симметрия является движением. Изображать фигуры, полученные при центральной симметрии. Доказывать характерное свойство центральной симметрии — изменение направлений на противоположные
8.5	Осевая симметрия на плоскости	1	Доказывать характерное свойство осевой симметрии — наличие прямой, состоящей из неподвижных точек
8.6	Зеркальная симметрия	1	Доказывать характерное свойство зеркальной симметрии — наличие плоскости, состоящей из неподвижных точек
8.7	Поворот на плоскости		Формулировать определение поворота на плоскости. Формулировать и доказывать, что поворот является движением

8.8	Классификация движений плоскости	1	Понимать, что любое движение является одним из видов движений: поворотом, либо параллельным переносом, либо скользящей симметрией, частным случаем которой является осевая симметрия
8.9	Равенство фигур и движения	1	Формулировать два (равносильных) варианта равенства фигур. Проверить, что данное ранее определение равенства треугольников равносильно новому определению их равенства
9.1	Общее понятие о симметрии фигур. Виды симметрии фигур	1	Формулировать, что значит фигура обладает симметрией. Классифицировать симметрии фигуры по видам движений. Приводить примеры симметричных геометрических фигур и реальных предметов. Изображать и моделировать симметричные фигуры
9.2	Фигуры, обладающие переносной симметрией	1	Доказывать неограниченность фигур, обладающих переносной симметрией. Распознавать и конструировать бордюры и паркеты
9.3, 9.4	Элементы симметрии фигур. Симметрия правильных многоугольников	1	Распознавать элементы симметрии простейших симметричных фигур. Формулировать определение фигуры вращения
9.4, 9.5	Симметрия правильных пирамид и призм. Правильные многогранники	1	Перечислять элементы симметрии правильных пирамид и призм. Перечислять и моделировать правильные многогранники
10.1	Преобразование подобия и его простейшие свойства	1	Объяснять и иллюстрировать понятие подобия фигур. Приводить примеры подобных фигур. Доказывать простейшие свойства подобия. Выделять движение как частный случай подобия
10.2	Гомотетия	1	Доказывать свойства гомотетии

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
10.3	Свойства подобных фигур	1	Представлять подобие как результат последовательно выполненных гомотетии и движения. Доказывать свойства подобий
10.4	Признаки подобия треугольников	1	Рассмотреть частный случай подобных фигур — подобные треугольники. Доказывать его равносильность прежнему подходу к подобию треугольников, определённому через пропорциональность их сторон
	Решение задач	2	Решать задачи по всей теме «Подобие»
	Контрольная работа № 2	1	Контрольная работа по главе «Преобразования»
Глава III. Геометрия круга		**20**	
11.1	Свойства хорд	1	Формулировать и доказывать свойства хорд окружности. Формулировать определение центрального угла
11.2	Касание прямой и окружности	1	Формулировать определение касательной к окружности. Доказывать теорему о касательной к окружности
	Взаимное расположение прямой и окружности	1	Классифицировать случаи взаимного расположения прямой и окружности
11.3	Градусная мера дуги окружности	1	Формулировать определения градусной меры дуги окружности и равенства дуг. Вычислять градусные меры дуг
11.4	Измерение вписанных углов	1	Формулировать определение вписанного угла, доказывать теорему об измерении вписанного угла и выводить её следствия. Вычислять вписанные углы

11.5	Произведение отрезков хорд	1	Доказывать теорему о произведении хорд и вычислять отрезки хорд
	Произведение отрезков секущих	1	Доказывать теоремы о произведении отрезков секущих и квадрате касательной. Вычислять отрезки секущих и касательные
11.6	Взаимное расположение двух окружностей	1	Классифицировать взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов и расстояния между центрами
12.1	Окружность, описанная вокруг многоугольника	1	Формулировать определение описанной вокруг многоугольника окружности, приводить примеры многоугольников, имеющих описанную окружность и не имеющих её, доказывать теорему об окружности, описанной вокруг треугольника
	Радиус окружности, описанной вокруг треугольника	1	Выражать радиус описанной вокруг треугольника окружности через сторону треугольника и синус противолежащего угла. Как следствие этой формулы получить теорему синусов
12.2	Окружность, вписанная в многоугольник	1	Формулировать определение вписанной в многоугольник окружности, приводить примеры многоугольников, имеющих вписанную окружность и не имеющих её, доказывать теорему об окружности, вписанной в треугольник. Выразить площадь треугольника через периметр и радиус вписанной в него окружности
12.3	Замечательные точки треугольника	1	Доказывать теорему о точке пересечения медиан треугольника
	Окружность Эйлера	1	Доказывать теорему об ортоцентре треугольника
13.1	Измерение длины кривой. Длина окружности	1	Доказать, что длина окружности пропорциональна её радиусу

Продолжение

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
13.2	Длина дуги окружности	1	Вычислять длины дуг окружности, зная их градусные меры
13.3	Измерение площади плоской фигуры. Площадь круга	1	Вывести формулу для площади круга. Вычислять площади кругов
	Площадь сектора	1	Вычислять площадь сектора круга, зная градусную меру его дуги
13.4	Число π	1	Ознакомиться с историей, связанной с числом π
14.1*, 14.2*	Цилиндры и конусы. Объёмы цилиндра и конуса	1	Ввести понятия цилиндра, конуса, образующей, основания, развёртки. Выводить формулы для вычисления площадей их поверхностей и объёмов
14.3*, 14.4*	Сфера и шар. Объём шара. Площадь сферы. Архимед	1	Вспомнить основные понятия, связанные со сферой и шаром. Выводить формулы для вычисления объёма шара и площади его поверхности, ознакомиться с историей их доказательства Архимедом
	Решение задач по теме «Окружность и круг»	1	Решение вычислительных задач, связанных с окружностью и кругом
	Контрольная работа № 3	1	Контрольная работа по теме «Окружность и круг»
	Итоговое повторение и итоговая контрольная работа	5	

* — так обозначены пункты для интересующихся математикой